Министерство образования и науки Российской Федерации

Магнитогорский государственный
технический университет им. Г. И. Носова

Кафедра обработки металлов давлением

ОЦЕНКА МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания к выполнению лабораторной работы «Изучение метрологических характеристик измерений» для студентов специальностей 150106, 200503

Магнитогорск
2009

Составители: С.А. Левандовский
А.Б. Моллер
О.Н. Тулупов
Д.И. Кинзин
Е.А. Евтеев

Методические указания к выполнению лабораторной работы «Изучение метрологических характеристик измерений» для студентов специальностей 150106, 200503. Магнитогорск: МГТУ, 2008. 21 с.

Рецензент И.Г. Шубин

ВВЕДЕНИЕ

Измерения играют главенствующую роль в инженерных и научных исследованиях. Чем точнее, своевременнее, дешевле и надёжнее будут измерения, тем больше пользы они принесут человеку при решении различных задач.

Как и любой другой процесс – процесс измерения может характеризоваться качественными показателями. К таким показателям относят метрологические характеристики процесса измерения.

Всегда важно знать погрешность, точность, достоверность, правильность и другие метрологические характеристики.

Владение информацией об этих величинах позволяет более эффективно использовать результаты измерений, сопоставлять их и определять степень доверия к ним.

Для случаев однократных и многократных измерений подход к определению метрологических характеристик различен.

При однократных измерениях все характеристики прибора и метода измерения известны заранее, так как определяются при поверке и калибровке средств измерения на основе испытаний. Подобные испытания проводят в условиях многократных измерений с обязательной обработкой результатов измерения при помощи элементов математической статистики.

Следовательно, важно определять метрологические характеристики для многократных измерений.

Цель работы – ознакомиться с основными метрологическими характеристиками и научиться определять точность при многократных измерениях.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

По сути, измерение это фиксирование какого либо свойства рассматриваемого объекта. Для случая металлургической отрасли рассматриваемый объект материален, следовательно, обладает свойствами характерными для материальных объектов.

Метрологические характеристики установлены нормативным документом ГОСТ 8.009-84 «Нормируемые метрологические характеристики средств измерений». Остановимся более подробно на некоторых характеристиках, с которыми будем работать.

Точность измерений характеризуется близостью результатов к истинному значению измеренной величины. Точные измерения неоднократно позволяли делать фундаментальное открытие. Они имеют большое значение для прогресса в естественной и технической науке.

Погрешность измерений – разность между полученным при измерении и истинным значением измеряемой величины. Погрешность измерений вызывается несовершенством методов и средств измерений, непостоянством условий, несовершенством наблюдателя и особенностями его органов чувств.

Истинное значение величины – это значение, идеальным образом отражающее свойство данного объекта, как в количественном, так и в качественном отношении.

Величина погрешности зависит от множества факторов, которые можно разделить на две категории:

- предсказуемые;
- непредсказуемые.

Предсказуемые факторы – это влияния, оказываемые на процесс измерения, которые хорошо изучены и с помощью введения поправок в результат измерения могут быть практически полностью исключены. Это систематическая погрешность.

Непредсказуемые факторы – это малоизученные воздействия на процесс измерения одновременно или поочередно нескольких факторов, что приводит к возникновению случайной погрешности.

Поскольку истинное значение физической величины неизвестно, то на практике пользуются ее действительным значение (с учетом погрешностей).

Для сравнительной оценки средств измерений используется понятие точность средства измерения, как характеристику качества средства измерений, отражающую близость его погрешности к нулю.

По закономерности проявления выделяют три вида погрешностей.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности средства измерений, принимаемая постоянной или закономерно изменяющейся.

Случайная погрешность – составляющая погрешности средства измерений, изменяющаяся непредсказуемо - случайным образом.

Грубая погрешность – погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях погрешность. Сюда относятся так же и промахи. *Промахи* – погрешности, зависящие от наблюдателя и связанные с неправильным обращением со средствами измерений, неверным отсчетом показаний или ошибками при записи результатов.

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Общая погрешность измерения может быть представлена в виде:

$$\Delta = \Delta_c + \overset{\circ}{\Delta}, \qquad (1)$$

где Δ - общая погрешность, Δ_c - систематическая составляющая, $\overset{\circ}{\Delta}$ - случайная составляющая.

К систематическим погрешностям относятся, например, погрешности от неисправности прибора, ошибки нанесения шкалы измерительных приборов, несоответствия действительного значения меры её номинальному значению. Систематические погрешности могут быть изучены опытным путем и исключены из результатов измерений. Основной путь для установления систематической погрешности – тщательный анализ условий эксперимента (измерения), применяемой теории (принципа измерения) и применяемой.

По виду источника появления систематические погрешности могут быть *методические*, *инструментальные* и *субъективные.*

Субъективные систематические погрешности связаны с индивидуальными особенностями оператора. Как правило, эта погрешность возникает из-за ошибок в отсчете показаний (примерно 0,1 деления шкалы) и неопытности оператора. В основном же систематические погрешности возникают из-за методической и инструментальной составляющих.

Методическая составляющая погрешности обусловлена несовершенством метода измерения, приемами использования СИ, некорректностью расчетных формул и округления результатов.

Инструментальная составляющая возникает из-за собственной погрешности СИ, определяемой классом точности, влиянием СИ на результат и ограниченной разрешающей способности СИ.

Все виды составляющих погрешности нужно анализировать и выявлять в отдельности, а затем суммировать их в зависимости от характера, что является основной задачей при разработке и аттестации методик выполнения измерений.

В ряде случаев систематическая погрешность может быть исключена за счет устранения источников погрешности до начала измерений (профилактика погрешности), а в процессе измерений - путем внесения известных поправок в результаты измерений.

Профилактика погрешности - наиболее рациональный способ ее снижения и заключается в устранении влияния, например, температуры (термостатированием и термоизоляцией), магнитных полей (магнитными экранами), вибраций и т.п. Сюда же относятся регулировка, ремонт и поверка СИ.

Исключение постоянных систематических погрешностей в процессе измерений осуществляют методом сравнения (замещения, противопоставления), компенсации по знаку (предусматривают два наблюдения, чтобы в результат каждого измерения систематическая погрешность входила с разным знаком), а исключение переменных и прогрессирующих — способами симметричных наблюдений или наблюдением четное число раз через полупериоды.

СЛУЧАЙНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Случайными называются погрешности, которые при многократных повторениях измерения изменяются нерегулярным, непредсказуемым образом, приводя к разбросу измеренных значений. К ним относятся, например, перекосы элементов приборов в их направляющих, нерегулярные изменения моментов трения в опорах, погрешности округления или отсчитывания показаний приборов.

Случайная $\overset{o}{\Delta}$ составляющая изменяется при повторных измерениях одного и того же параметра случайным образом.

Случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений, но их влияние можно уменьшить путем увеличения числа измерений одной величины и обработки опытных данных.

Учитываю тот факт, что систематические погрешности практически полностью удаётся исключить, остановим наше внимание на случайной погрешности более подробно.

Не смотря на то, что случайная величина меняется непредсказуемо, были предложены вполне реальные методики для исследования поведения случайной величины.

Закон распределения – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Часто также используют термин «*Распределение вероятности*».

Закон распределения представляют либо функцией распределения, либо плотностью распределения.

Функция распределения отображает вероятность события, заключающегося в том, что случайная величина (например X) примет значение меньше, чем произвольное действительное число x (т. е. вероятность события $X < x$):

$$F(x) = P(X < x). \qquad (2)$$

В виде функции распределения можно отобразить закон распределения как непрерывной, так и дискретной случайной величины (рис. 1).

Независимо от вида случайной величины функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ есть неубывающая функция x и если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) < F(x_2)$. Разность двух ординат, соответствующих точкам x_1 и x_2, дает вероятность того, что значения случайной величины будут лежать в интервале между x_1 и x_2:
$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (3)$$

2. Значения функции распределения при предельных значениях аргумента (т. е. соответствующей случайной величины) равны 0 и 1. Для генеральной совокупности это свойство записывают следующим образом:

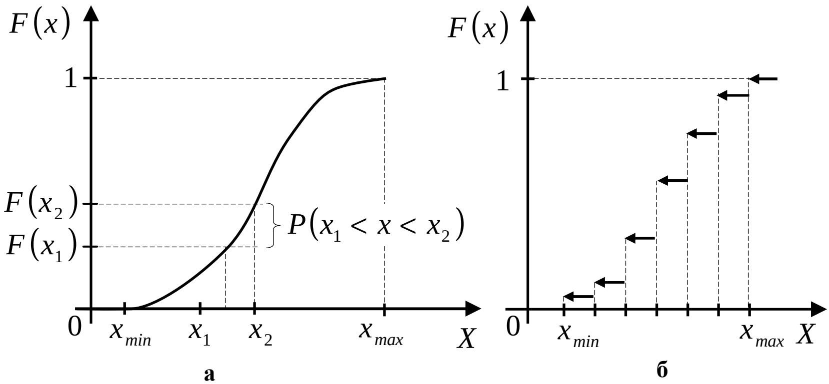

Рис. 1. Функции распределения непрерывной (а) и дискретной (б) случайных величин

$$F(x_{min}) = 0, F(x_{max}) = 1. \qquad (4)$$

Особенностью функции распределения дискретной случайной величины является то, что она есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям (частотам) этих значений (рис. 1,б).

Плотность распределения (используют также термины *плотность распределения вероятности, плотность вероятности*) отображает вероятность события, состоящего в том, что произвольное значение x случайной величины X находится в некотором наперед заданном интервале $\{x_1, x_2\}$ (т.е. вероятность события $x_1 < x < x_2$):

$$f(x) = P(x_1 < X < x_2). \quad (5)$$

График плотности распределения некоторой случайной величины изображен на рис. 2.

Плотность распределения существует только для непрерывной случайной величины и если функция распределения данной случайной величины непрерывна и дифференцируема, то:

$$f(x) = F'(x). \quad (6)$$

По сравнению с функцией распределения описание распределения с помощью плотности вероятности более удобно и наглядно, так как позволяет отобразить его особенности на различных участках внутри интервала варьирования данной случайной величины.

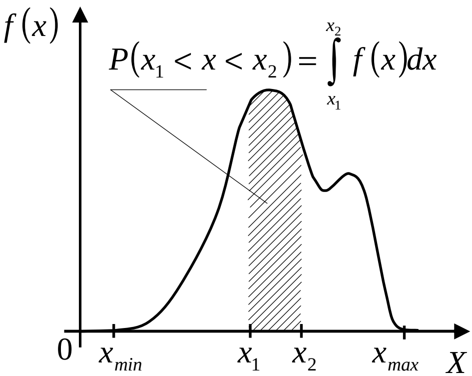

Рис. 2. Плотность распределения вероятности случайной величины

Свойства плотности распределения:

Плотность распределения определяет случайную величину также полно, как и функция распределения и является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0. \quad (7)$$

Площадь, ограниченная числовой осью, кривой плотности распределения, а также прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ равна вероятности того, что случайная величина примет некоторое значение в рассматриваем интервале:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 < x < x_2) \cdot \qquad (8)$$

Так как событие $x_{min} < x < x_{max}$ является достоверным, площадь под кривой плотности распределения равна 1:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx = 1 \cdot \qquad (9)$$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЕГО ОСОБЕННОСТИ

К настоящему времени обнаружен целый ряд законов распределения вероятности. Для дискретных случайных величин наиболее характерны распределение Пуассона и биноминальное. Для непрерывных случайных величин известны показательный и нормальный законы распределения, а также связанные с нормальным, - распределения Стьюдента, Фишера и хи-квадрат.

Нормальное распределение занимает особое положение, так как в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности оно является предельным законом, к которому, при весьма часто встречающихся условиях, приближаются все другие распределения.

Нормальное распределение - это распределение непрерывной случайной величины, для которого характерна плотность распределения вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (10)$$

где M_x – математическое ожидание (характеристика положения истинного значения случайной величины);

σ – стандартное отклонение (характеристика вариации значений случайной величины).

Функция и плотность нормального распределения схематично изображены на рис. 3.

Нормальное распределение имеет следующие важные для практического использования свойства:

Кривая плотности распределения симметрична относительно прямой $x = M_x$ и при этой абсциссе достигает максимума, который равен:

$$f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0{,}3989}{\sigma}\,. \qquad (11)$$

Площадь под кривой, ограниченная ординатами $f(M_x - 3\sigma)$ и $f(M_x + 3\sigma)$ равна 0,9973 (т. е. практически 1). Это означает, что при нормальном распределении случайной величины вероятность проявления ее значений, отличающихся от математического ожидания более, чем на 3σ, практически равна нулю.

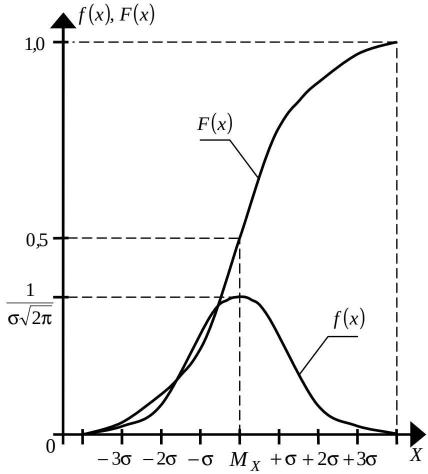

Рис. 3. Функция и плотность нормального распределения

Площадь под кривой, ограниченная ординатами $f(M_x - 2\sigma)$ и $f(M_x + 2\sigma)$ равна 0,9544 (с достаточной для практики точностью 0,95). Это означает, что при нормальном распределении случайной величины вероятность проявления ее значений, отличающихся от математического ожидания более, чем на 2σ , не превышает 0,05 (т. е. 5 %).

Площадь под кривой, ограниченная ординатами $f(M_x - \sigma)$ и $f(M_x + \sigma)$ равна 0,6826 (для практических целей можно принять 0,7). Это означает, что при нормальном распределении случайной величины вероятность проявления ее значений, отличающихся от математического ожидания более, чем на σ, равна 0,3 (т. е. 30 %).

Нормальное распределение обладает свойством линейности, которое формулируется следующим образом. Если *независимые* случайные величины X_1 и X_2 имеют нормальные распределения, то для произвольных чисел α и β величина $Y = \alpha X_1 + \beta X_2$ также имеет нормальное распределение, причем из свойств математического ожидания и дисперсии следует

$$M_Y = \alpha M_{X1} + \beta M_{X2}; \qquad (12)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{X1}^2 + \beta \sigma_{X2}^2}. \qquad (13)$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров - математического ожидания M_x и стандартного отклонения σ, что затрудняет ее представление в табличном (табулированном) виде. Поэтому было предложено использовать нормированную случайную величину:

$$Z = \frac{x - M_x}{\sigma},$$

для которой функция плотности нормального распределения (10) принимает вид:

$$f(x) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \qquad (14)$$

График плотности стандартного нормального распределения приведены на рис. 5.

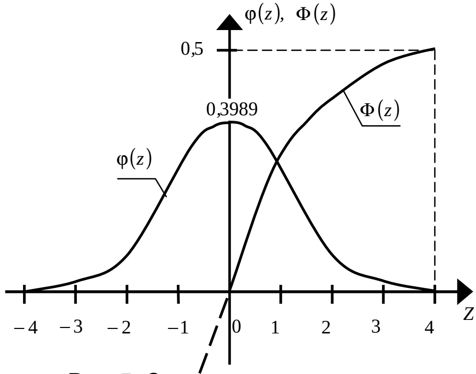

Рис. 5. Стандартное нормальное распределение: φ(*z*) – кривая Гаусса; Φ(*z*) – Функция Лапласа

График плотности стандартного нормального распределения называют “*кривая вероятностей*”, “*кривая Гаусса*”. Основным отличием кривой Гаусса от кривой ненормированного нормального распределения является то, что она фактически строится для $M(x)=0$ и $\sigma=1$ (рис. 5). Из указанной особенности следует ряд специфических свойств.

Плотность стандартного нормального распределения симметрична относительно оси ординат и имеет максимум, равный 0,3989.

Плотность стандартного нормального распределения является четной функцией:

$$\varphi(-z)=\varphi(z).$$

При $z=4$ плотность стандартного нормального распределения равна нулю

$$\varphi(4)=0{,}0001\approx 0\,.$$

Поэтому при ее табулировании указываются значения для нормированных значений случайной величины от 0 до 4.

Значение функции ненормированного нормального распределения равно значению функции стандартного нормального распределения.

Чтобы получить функцию стандартного нормального распределения необходимо выполнить интегрирование зависимости (14), однако результат не может быть выражен через элементарные функции. Поэтому используется функция Лапласа:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}}du\,. \qquad (15)$$

Смысл функции Лапласа иллюстрируется рис. 6.

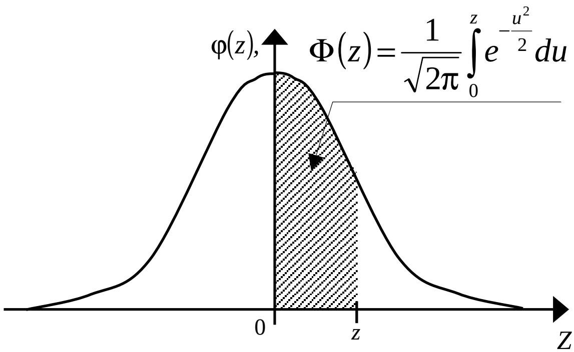

Рис. 6. К определению Функции Лапласа

$\Phi(z)$ представляет собой значение вероятности, с которой случайная величина, обладающая стандартным нормальным распределением, принимает значение из интервала $\{0;\ z\}$. Основные свойства функции Лапласа:

1. Функция Лапласа является нечетной:

$$\Phi\ (-z) = -\ \Phi(z).$$

Ее график симметричен относительно начала координат (рис. 6) и $\Phi(0)=0$.

2. Функция Лапласа является монотонно возрастающей в пределах от $\Phi(-4) = -0,5$ до $\Phi(+4) = +0,5$.

С учетом указанных свойств переход от функции Лапласа к функции стандартного нормального распределения осуществляется следующим образом:

$$F\left(z,0,1\right)=0{,}5+\Phi\left(z\right).$$

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При анализе множества числовых значений, являющихся результатами измерений необходимо иметь ввиду, что меньшая случайная погрешность наблюдается при максимальном количестве значений измеренного параметра

$$\overset{\circ}{\Delta} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Понятно, что повышать количество измерений до бесконечности невозможно, поэтому приходиться ограничиваться их выборкой.

Объём выборки зависит от нескольких факторов:

- экономической целесообразности повышения числа измерений, больше измерений - больше расходов;

- точности, которая нам необходима (технические измерения 95% или исследовательские измерение 99,73%)

- времени, затрачиваемой на обработки информации.

Фактически общей задачей обработки результатов многократных измерений является установление степени доверия к результатам и определения точности с учётом случайной и систематической составляющей погрешности.

Для установления степени доверия и определения точности результатов многократных измерений нам необходимо учесть статистические характеристики.

Среди числовых статистических характеристик случайной величины различают:

- характеристики положения;
- характеристики рассеяния;
- характеристики формы распределения.

Математическое ожидание случайной величины X представляет собой такое ее значение M_x, около которого сосредоточены все другие возможные. В математической статистики принято считать, что математическое ожидание максимально приближено к истинному значению величины и может его достоверно заменять в расчетах. Наилучшей оценкой математического ожидания (т. е. и состоятельной, и несмещенной, и эффективной) является выборочное среднее, рассчитываемое как среднее арифметическое:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx M_x . \qquad (16)$$

Медиана Ме – это такое значение случайной величины, что для 50% ее возможных значений выполняется условие x < Me, а для других 50% выполняется условие x > Me.

Мода Mo – значение случайной величины, вероятность появления которого наибольшая.

Дисперсия D_X – математическое ожидание квадратов отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания:

$$D_X = M\left\{\left[x - M_X\right]^2\right\}. \qquad (17)$$

На основании выборки дисперсию случайной величины оценивают следующими характеристиками: *дисперсией распределения* σ^2 *(смещенная оценка)* и *выборочной дисперсией* s^2 *(несмещенная оценка)*. Указанные выборочные оценки дисперсии рассчитывают по формулам:

$$D_X = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2; \qquad (18)$$

$$D_X = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 . \qquad (19)$$

Выборочная дисперсия (19) является эффективной, несмещенной и состоятельной оценкой при любом объеме выборки. Для дисперсии распределения (18) состоятельность также обеспечивается при любом объеме выборки, но несмещенность и эффективность достигаются только при n > 30.

Несмещенность и эффективность s^2 достигнуты за счет того, что в знаменателе объем выборки уменьшен на единицу. Это оказалось необходимым в связи с использованием в формуле среднего выборочного $\overline{x}$, значение которого связано с элементами рассматриваемой выборки. Каждая величина, зависящая от элементов выборки и используемая в формуле выборочной оценки, называется *связью*. Разность между объемом выборки и числом связей l в формуле, по которой рассчитывается статистика, называют *числом степеней свободы* данной статистики $\nu = n - l$.

Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение, стандарт). Недостатком дисперсии считают то, что она имеет размерность квадрата анализируемой величины. Для устранения указанного недостатка было введено среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение, стандарт), которое представляет собой корень квадратный из дисперсии случайной величины:

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} \,. \tag{20}$$

Наилучшей выборочной оценкой для σ_X является *выборочное среднее квадратическое отклонение (выборочное стандартное отклонение)*:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \approx \sigma_X \,. \tag{21}$$

Как *видно* из формулы (21), выборочное стандартное отклонение определяется через выборочную дисперсию (19) и поэтому также является несмещенной и эффективной оценкой при любом n.

Для выборок объемом $n > 30$ свойства несмещенности и эффективности проявляются также у стандартного отклонения, вычисляемого на основании дисперсии распределения (18):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \approx \sigma_X \,. \tag{22}$$

В практике анализа числовой информации используют также и ряд других характеристик рассеяния случайной величины. Например, коэффициент вариации.

Коэффициент вариации V_x характеризует, какую долю от математического ожидания случайной величины составляет ее среднее квадратическое отклонение и является мерой относительной изменчивости наблюдаемой случайной величины:

$$V_x = \frac{s}{\bar{x}}. \tag{23}$$

Интервальные оценки характеризуют ошибку оценивания истинного значения ξ некоторой характеристики распределения случайной величины с помощью соответствующей выборочной оценки θ. Их применение необходимо потому, что каждая выборочная оценка сама по себе является случайной величиной с некоторым распределением вероятности.

При интервальном оценивании используют доверительную вероятность, уровень значимости, доверительный интервал и доверительные границы.

Доверительная вероятность - вероятность события, заключающегося в том, что ошибка оценивания истинного значения некоторого параметра распределения случайной величины его выборочной оценкой не превышает величины Δ:

$$p = Prob\left(\left|\xi - \theta\right| \le \Delta\right), \text{ где } p < 1. \tag{24}$$

Уровень значимости - вероятность события, заключающегося в том, что ошибка оценивания истинного значения некоторого параметра распределения случайной величины его выборочной оценкой превышает величину Δ:

$$\alpha = \Pr ob\left(\left|\xi - \theta\right| > \Delta\right) = (1 - p). \tag{25}$$

Доверительный интервал - интервал значений выборочной характеристики, внутри которого истинное значение оцениваемого параметра находится с заданной доверительной вероятностью.

То есть, если *p* означает вероятность того, что $\bar{x}$ результата измерения отличается от истинного на величину не более, чем $\overset{\circ}{\Delta}$:

$$p = \left\{\bar{x} - \overset{0}{\Delta} < x_{ист} < \bar{x} + \overset{0}{\Delta}\right\},. \tag{26}$$

то в этом случае *р* — доверительная вероятность, а интервал от $\bar{x} - \overset{0}{\Delta}$ до $\bar{x} + \overset{0}{\Delta}$ - доверительный интервал.

Доверительные границы – значения выборочной оценки, представляющие собой границы доверительного интервала:

$$\theta_1 = \theta - \Delta\,; \tag{27}$$

$$\theta_2 = \theta + \Delta\,. \tag{28}$$

В практике обработки числовой информации наиболее часто встречается задача интервального оценивания выборочного среднего $\bar{x}$. При ее решении исходят из того, что $\bar{x}$ как случайная величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M_{\bar{x}} = \bar{x}$ и средним квадратическим отклонением.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}\,. \tag{29}$$

Величина $s_{\bar{x}}$ имеет также специальное название - стандартная ошибка выборочного среднего или стандартное отклонение выборочного среднего.

Доверительные границы для выборочного среднего симметричны:

$$\Delta_x = \pm\, s_{\bar{x}}\, t[\alpha; n-1], \tag{30}$$

где $t[\alpha; n-1]$ - табличное значение (квантиль) распределения Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $\nu = n-1$, также называемое коэффициентом Стьюдента.

Зная доверительные границы выборочного среднего, можно утверждать, что с вероятностью $p = 1 - \alpha$ истинное значение случайной величины равно:

$$\bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}}\,. \tag{31}$$

Иначе:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}\,. \tag{32}$$

В зависимости от значений α и *n* табличное значение коэффициента Стьюдента можно определить по следующей таблице.

Таблица 1

Значения коэффициента Стьюдента t в зависимости от числа измерений N и от доверительной вероятности

P \ N	5	6	7	8	9	10
0,7	1,189567	1,155767	1,134157	1,119159	1,108145	1,099716
0,75	1,344398	1,300949	1,273349	1,254279	1,240318	1,229659
0,8	1,533206	1,475884	1,439756	1,414924	1,396815	1,383029
0,85	1,778192	1,699363	1,650173	1,616592	1,592221	1,573736
0,9	2,131847	2,015048	1,94318	1,894579	1,859548	1,833113
0,95	2,776445	2,570582	2,446912	2,364624	2,306004	2,262157
0,97	3,29763	3,002875	2,828928	2,714573	2,633814	2,573804
0,99	4,604095	4,032143	3,707428	3,499483	3,355387	3,249836
0,99973	12,07243	9,087329	7,600795	6,729617	6,163418	5,768318

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

В работе мы будем анализировать данные полученные при измерении одной из характеристик металлопродукции.

В качестве такой характеристики рассмотрим значение диаметра катанки, которое имеет случайную погрешность и варьируется по длине прутка (рис. 7).

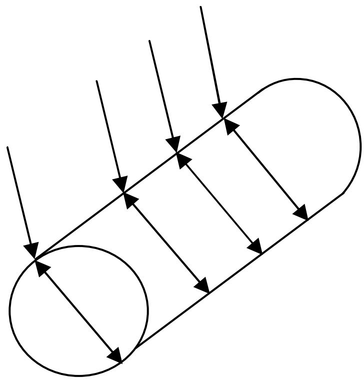

Рис. 7. Измерение диаметра катанки

2.1. Порядок выполнения работы

Измерение диаметра прутка катанки производиться при помощи микрометра с точностью до сотых долей мм.

Рекомендуется проводить от 5 до 10 замеров диаметра катанки.

Количество замеров будем обозначать числом *n* или *N.*

Результаты измерения свести в таблицу вида:

Таблица 2

Результаты измерения

№ измерения	X (значения, мм)	$\left(x_i - \overline{x}\right)$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
1			
2			
…			
N			

Далее необходимо определить среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \qquad (33)$$

Теперь необходимо убедиться, что числовые значения измеряемой величины отличаются от этого значения не более чем на величину трехкратного стандартного отклонения.

Для этого определим стандартное отклонение среднего арифметического, то есть ошибку среднего арифметического.

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \qquad (34)$$

Таким образом, допустимый диапазон для значений будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{X} - 3 * S_x \langle \overline{X} \langle \overline{X} + 3 * S_x \qquad (35)$$

Любые значения, не попадающие в этот диапазон, следует исключить, как грубые погрешности.

После исключения грубых погрешностей вычисление средней квадратической ошибки и стандартного отклонения следует повторить.

Далее выберем три любых значения доверительной вероятности согласно таблице 1 (например, 0,9; 0,95; 0,99).

Следующей нашей задачей будет являться определение ширины доверительного интервала для каждого значения доверительный вероятности, которые выбраны.

Учитывая тот факт, что доверительные границы для выборочного среднего симметричны, определим полуширину интервала основываясь на формуле 30.

Получим полуширину интервала:

$$\Delta\theta = S_{\bar{x}} * t(\alpha, n) \tag{36}$$

где $S_{\bar{x}}$ - стандартное отклонение среднего арифметического,

$t(\alpha, n)$ - коэффициент Стьюдента для n измерений и $p = 1 - \alpha$ доверительной вероятности (см. табл. 1).

Знаю полуширину интервала – обозначим доверительный интервал полностью:

$$\overline{X} - \Delta\theta \ldots \overline{X} + \Delta\theta \tag{37}$$

Для трёх выбранных нами значений доверительной вероятности мы должны получить три доверительных интервала, а также для каждой из них вычислить точность измерения следующим образом:

$$z = (1 - \frac{\Delta\theta}{\bar{x}}) * 100\% \tag{38}$$

2.2. Содержание отчета

1. Название и цель работы.
2. Краткое описание точности, погрешности, доверительного интервала для данной работы.
3. Результаты измерений и расчетов.
   Результаты вычислений свести в таблицу вида:

Таблица 3

Результаты обработки данных

P (доверительная вероятность)	α (надёжность)	Доверительный интервал	Точность, %

4. Выводы

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют метрологическими характеристиками?
2. Что вы понимаете под измерением?
3. Что такое погрешность измерения?
4. Что такое точность измерения?
5. Что такое систематическая погрешность?
6. Что такое случайная погрешность?
7. Какие погрешности и как можно исключить?
8. Что чего нужно производить несколько измерений?
9. Что такое функция и что такое плотность распределения?
10. Что такое нормальное распределение?
11. Что такое смещенная и несмещенная оценка?
12. Что показывает функция Лапласа?
13. Что такое математическое ожидание?
14. Что такое мода?
15. Что такое медиана?
16. Что такое дисперсия?
17. Что такое доверительный интервал?
18. Что такое доверительная вероятность?
19. Что такое уровень значимости?
20. Что такое коэффициент вариации?
21. Что такое стандартное отклонение?
22. Для чего применяется распределение Стьюдента?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ Р 50779.11-2000 (ИСО 3534.2-93). Статистичесие методы. Статистическое управление качеством. Термины и определения. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2001. – 37 с.
2. ГОСТ Р 50779.44-2001. Статистически методы. Показатели возможностей процессов. Основные методы расчета. - М.: ИПК Издательство стандартов, 2001. – 16 с.
3. ГОСТ Р 50779.11-2000 (ИСО 3534.2-93) Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. -М: Издательство стандартов, 2001. -37с.
4. ГОСТ Р 50779.44-2001 Статистические методы. Показатели возможностей процессов. Основные методы расчета. - М: Издательство стандартов, 2001. -16с.
5. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., перераб. и доп.—М.: Высш. шк., 1988.— 239 с: ил.