ЧАСТЬ КУРСА ЛЕКЦИЙ
«МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ»
РАЗДЕЛ «МЕТРОЛОГИЯ»

ВВЕДЕНИЕ

Измерения являются одним из путей познания природы человеком; они количественно характеризуют окружающий материальный мир, раскрывая действующие в природе закономерности. Для получения таких количественных данных потребовалось развитие методов измерений и систем единиц, установление единообразия единиц физических величин и мер, осуществляющих их воспроизведение.

Когда мы подходим к границам наших знаний, точность измерений оказывается фактором, ограничивающим дальнейшее их углубление. Долгое время атом считали не делимым, но повышение точности измерений позволило открыть много нового в ядерной физике, например, сравнительно недавно было доказано, что и электрон тоже не является цельной, неделимой частицей. В то же время требования к точности измерений являются необходимым условием не только для развития наших знаний о мире, но и для осуществления народно-хозяйственной деятельности.

Современная теория измерений опирается на физику измерительных процессов, метрологию, математическую статистику и теорию вероятности. Например, одной из функций метрологии - создание и развитие теоретических основ измерений: разработка теории измерений и методов оценки погрешностей.

Состояние современной измерительной техники, теории измерений и методик обработки результатов позволяют добиваться очень большой точности результата и выражения этого результата с помощью математических моделей.

Нельзя недооценивать роль измерений в научных исследованиях и в процессах контроля параметров процессов для управления последними.

Изучение дисциплины «Общая теория измерений» преследует следующие цели:

- получение знаний об измерительных шкалах и системах единиц физических величин; о принципе единства измерений;
- овладение методиками оценки погрешностей измерений;
- развитие творческого мышления, повышение уровня общей и технической культуры;
- подготовка к выполнению и защите выпускной квалификационной работы.

1 Основы метрологии и теории измерений

1.1. Физические свойства, величины и шкалы

Все объекты окружающего мира характеризуются своими свойствами. Свойство – философская категория, выражающая такую сторону объекта (явления, процесса), которая обусловливает его различие и общность с другими объектами (явлениями, процессами) и обнаруживается в его отношениях к ним. Свойство – категория качественная. Для количественного описания различных свойств процессов и физических тел вводится понятие величины.

Величина – это свойство чего-либо, что может быть выделено среди других свойств и оценено тем или иным способом, в том числе и количественно. Величина не существует сама по себе, она имеет место лишь постольку, поскольку существует объект со свойствами, выраженными данной величиной.

Измерением называют совокупность операций, выполняемых с помощью технического средства, хранящего единицу величины и позволяющего сопоставить с нею измеряемую величину. Полученное значение величины и есть результат измерений.

Измерения связаны как с физическими величинами, так и с величинами, относящимися к другим наукам.

Физической величиной называют одно из свойств физического объекта (явления, процесса), которое является общим в качественном отношении для многих физических объектов, отличаясь при этом количественным значением.

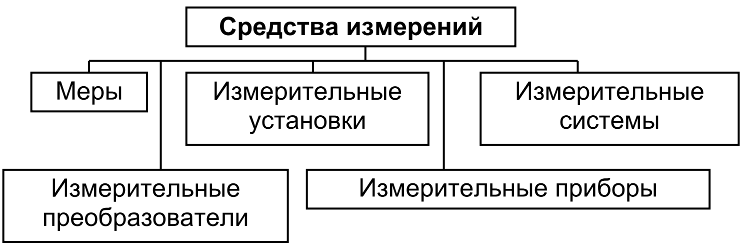


Рис. 1.1. Классификация средств измерений

Средство измерения (СИ) **–** техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящие и (или) хранящие единицу физической величины, размер которой принимается неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени.

Средство измерений позволяет воспринять, преобразовать, при необходимости сопоставить с мерой и представить значение измеряемой физической величины.

Разработка средств измерений является задачей приборостроения, метрология же должна дать единую классификационную схему средств измерений и выявить совокупность их параметров, стандартизация которых позволила бы выбрать средства, обеспечивающие получение результата с заданной точностью, прогнозировать точность проводимых с помощью этих средств измерений и установить методы их проверки.

Метрология – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их точности.

Остановимся на классификации величин. Величины можно разделить на два вида: реальные и идеальные.

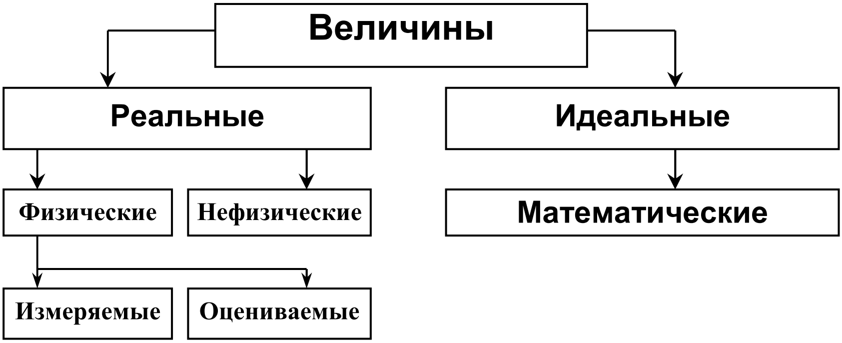


Рис. 1.2. Классификация величин

Идеальные величины главным образом относятся к математике и являются обобщением (моделью) конкретных реальных понятий.

Реальные величины делятся, в свою очередь, на физические и нефизические.

Физическая величина (ФВ) в общем случае может быть определена как величина, свойственная материальным объектам (процессам, явлениям), изучаемым в естественных (физика, химия) и технических науках. К нефизическим следует отнести величины, присущие общественным (нефизическим наукам) – философии, социологии, экономике и т.д.

Одно из определений физической величины. *Физической величины* – одно из свойств физического объекта, в качественном отношении общее для многих физических объектов, а количественном – индивидуальное для каждого из них. Таким образом, физические величины – это измеренные свойства физических объектов и процессов, с помощью которых они могут быть изучены.

Физические величины целесообразно разделить на измеряемые и оцениваемые. Измеряемые физические величины могут быть выражены количественно в виде определённого числа установленных единиц измерения. Возможность их введения и использования является важным отличительным признаком измеряемых ФВ. Физические величины, для которых, по тем или иным причинам, не может быть введена единица измерения, могут быть только оценены.

Нефизические величины, для которых единица измерения в принципе не может быть введена, могут быть только оценены.

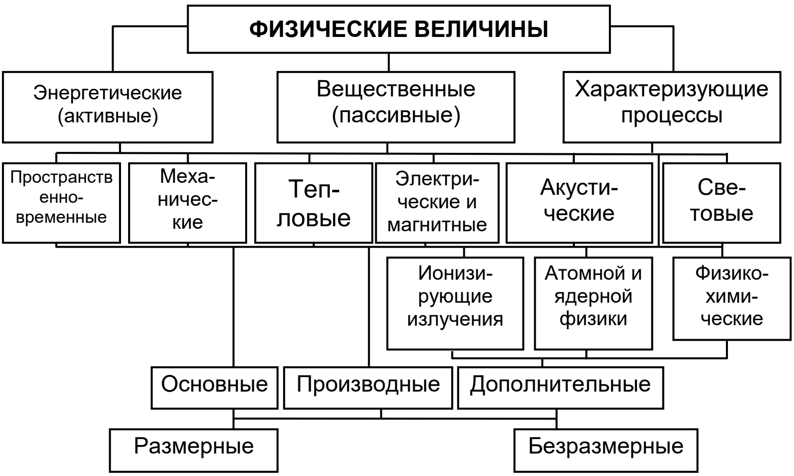


Рис. 1.3. Классификация физических величин

По видам явлений ФВ делятся на следующие группы:

- Вещественные, т.е. описывающие физические и физико-химические свойства веществ, материалов и изделий из них (масса, плотность, электрическое сопротивление, ёмкость, индуктивность и др.). Иногда эти физические величины называют “пассивными”, то есть для их измерения необходимо использовать вспомогательный источник энергии.

- Энергетические, т.е. величины, описывающие энергетические характеристики процессов преобразования, передачи и использования энергии (ток, напряжение, мощность, энергия). Они могут быть преобразованы в сигналы измерительной информации без использования вспомогательных источников энергии (“активные” величины).
- Величины, характеризующие протекание процессов во времени. К этой группе относятся различного рода спектральные характеристики, корреляционные функции и другие.

По принадлежности к различным группам физических процессов величины делятся на: пространственно-временные, механические, тепловые, электрические и магнитные, акустические, световые, физико-химические, ионизирующих излучений, атомной и ядерной физики.

По степени условной независимости от других величин данной группы делятся на основные (условно независимые), производные (условно зависимые) и дополнительные. В настоящее время в системе СИ используется семь физических величин, выбранных в качестве основных: длина, время, масса, температура, сила электрического тока, сила света и количество вещества. Дополнительные, – например, плоский и телесный угол.

По наличию размерности физические величины делятся на размерные, т. е. имеющие размерность, и безразмерные.

Величины оценивают при помощи шкал.

Шкала физической величины – упорядоченная последовательность значений ФВ, принятая по соглашению на основании результатов точных измерений.

В соответствии с логической структурой проявления свойств различают пять основных типов шкал измерений.

1. Шкала наименований (классификации). Эти шкалы используются для классификации эмпирических объектов, свойства которых проявляются только в отношении эквивалентности. Эти свойства нельзя считать физическими величинами, поэтому шкалы такого вида не являются шкалами ФВ.

Эта шкала сохраняет отношения эквивалентности и различия между объектами. В оценке она используется для обозначения кода района, типа объекта недвижимости (отдельно стоящий, встроенный, пристроенный) и его функционального использования. В данной шкале отсутствуют понятия масштаба и начала отсчёта.

В шкалах наименований, в которые отнесение отражаемого свойства к тому или иному классу эквивалентности осуществляется с помощью органов чувств человека, это наиболее адекватный результат, выбранный большинством экспертов. При этом большое значение имеет правильный выбор классов эквивалентной шкалы. Нумерация объектов по шкале наименований осуществляется по принципу: “не приписывай одну и ту же цифру разным объектам”. Числа, приписанные объектам, могут быть использованы для оценки вероятности или частоты появления данного объекта, но их нельзя применять для суммирования или других математических операций.

В этих шкалах отсутствуют понятия нуля (начала отсчёта), “больше” и “меньше” и единицы измерения. Примеры: атласы цветов, предназначенные для идентификации цвета; расположение объекта – в центре, слева, справа, сверху, снизу и т.п.

2. Шкала порядка (шкала рангов). Если свойство данного эмпирического объекта проявляют себя в отношении эквивалентности и порядка по возрастанию или убыванию количественного проявления свойства, то для него может быть построена шкала порядка. Она является монотонно возрастающей или убывающей и позволяет установить отношение больше-меньше между величинами, характеризующими данное свойство. В шкалах порядка существует или не существует нуль, но принципиально нельзя ввести единицы измерения, так как для них не установлено отношение пропорциональности и соответственно нет возможности судить, во сколько раз больше или меньше конкретные проявления свойства.

Порядковая шкала применяется для упорядочивания объектов по одному или совокупности признаков (ранжированию).

Шкала порядка широко используется при экспертном оценивании для упорядочения объектов по возрастанию (или убыванию) интенсивности изучаемой характеристики.

Ранг — это номер объекта в упорядоченном ряду. Чаще всего ранги выражаются натуральными числами, но эти числа не дают возможности сказать, на сколько или во сколько раз один объект предпочтительнее другого. Если, например, ранг объекта равен трём, то отсюда не следует, что объект, имеющий ранг, равный единице, в три раза предпочтительнее объекта, имеющего ранг, равный трём. В порядковой шкале также отсутствуют понятия масштаба и начала отсчёта.

В случаях, когда уровень познания явления не позволяет точно установить отношения, существующие между величинами данной характеристики, либо применение шкалы удобно и достаточно для практики, используют условные (эмпирические) шкалы.

Условная шкала – это шкала ФВ (разновидность шкалы порядка), исходные значения которой выражены в условных единицах. Например, шкала вязкости Энглера, 12-балльная шкала Бофорта для измерения силы морского ветра, шкала Рихтера для измерений колебаний земной коры.

Широкое распространение получили шкалы порядка с нанесёнными на них реперными точками. Например, шкала Мооса для определения твёрдости минералов, которая содержит 10 опорных (реперных) минералов с различными условными числами твёрдости:

1 – тальк; 2 – гипс; 3 – кальций; 4 – флюорит; 5 – апатит; 6 – ортоклаз; 7 – кварц; 8 – топаз; 9 – корунд; 10 – алмаз. Отнесение материала к той или иной градации твердости осуществляется на основании эксперимента, который состоит в том, что испытуемый материал царапается опорным.

В условных шкалах одинаковым интервалам между размерами данной величины не соответствуют одинаковые размерности чисел, отображающих размеры.

Операцию по приписыванию числа требуемой величине (например, величине описывающей количественное свойство объекта) следует считать оцениванием. Оценивание по шкале порядка является весьма неоднозначным и условным.

3. Шкала интервалов (шкала разностей). Эти шкалы являются дальнейшим развитием шкал порядка и применяются для объектов, свойства которых удовлетворяют отношениям эквивалентности, порядка и аддитивности. Шкала интервалов состоит из одинаковых интервалов, имеет единицу измерения и произвольно выбранное начало – нулевую точку. К таким шкалам относится летоисчисление по разным календарям, в которых за начало отсчёта принято либо сотворение мира, либо Рождество Христово и т.д. Температурные шкалы Цельсия, Фаренгейта и Реомюра также являются шкалами интервалов.

На шкале интервалов определены действия сложения и вычитания интервалов. Действительно, по шкале времени интервалы можно суммировать или вычитать и сравнивать, во сколько раз один интервал больше другого, но складывать даты каких либо событий бессмысленно.

Шкала интервалов величины Q может быть представлена в виде уравнения: $Q = Q_0 + q[Q]$, где q – числовое значение величины; Q_0 – начало отсчёта шкалы; $[Q]$ – единица рассматриваемой величины. Такая шкала полностью определяется заданием начала отсчёта Q_0 шкалы и единицы данной величины *[Q].*

Задать шкалу можно двумя путями.

При первом пути выбираются два значения Q_0 и Q_1 величины, которые относительно просто реализованы физически. Эти значения называются опорными точками или основными реперами, а интервал $(Q_1 – Q_0)$ – основным интервалом. Точка Q_0 – принимается за начало отсчёта, а величина $(Q_1 – Q_0)/n = [Q]$ за единицу Q. При этом число единиц n выбирается таким, чтобы $[Q]$ было целой величиной.

Перевод одной шкалы интервалов $Q = Q_{01}+q_1[Q]_1$ в другую $Q = Q_{02}+q_2[Q]_2$ осуществляется по формуле:

$$q_1 = \left(q_2 - \frac{Q_{02} - Q_{01}}{[Q]_1} \right) \frac{[Q]_1}{[Q]_2} \tag{1.1}$$

ПРИМЕР. Шкала Фаренгейта является шкалой интервалов. На ней Q_0 – температура смеси льда, поваренной соли и нашатыря, Q_1 – температура человеческого тела. Единица измерения градус Фаренгейта:

$$\left[Q_f \right] = \frac{\left(Q_1 - Q_0 \right)}{96} = 1^\circ F$$

Температура таяния смели льда, соли и нашатыря оказалась равной 32°F. А температура кипения воды составила 212°F.

По шкале Цельсия Q_0 – температура таяния льда, Q_1 – температура кипения воды. Градус Цельсия:

$$\left[Q_c \right] = \frac{\left(Q_1 - Q_0 \right)}{100} = 1^\circ C$$

Требуется получить формулу для перехода от одной шкалы к другой.

РЕШЕНИЕ. Формула перехода определяется в соответствии с выражением (1.1). Значение разности температур по шкале фаренгейта между точкой кипения воды и точкой таяния льда составляет 212°F - 32°F = 180°F. По шкале Цельсия интервал температур равен 100°С. Следовательно, 100°С = 180°F и отношение размеров единиц:

$$\frac{[\mathrm{Q}]_1}{[\mathrm{Q}]_2} = \frac{^\circ\mathrm{F}}{^\circ\mathrm{F}} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

Числовое значение интервала между началами отсчёта по рассматриваемым шкалам, измеренного в градусах Фаренгейта ($[Q]_1$ = F), равно 32. Переход от температуры по шкале Фаренгейта к температуре по шкале Цельсия производиться по формуле

$$t = \frac{5}{9}(t_F - 32)$$

При втором пути единица воспроизводиться непосредственно, как интервал, его некоторая доля или некоторое число интервалов размеров данной величины, а начало отсчёта выбирают каждый раз по-разному в зависимости от конкретных условий изучаемого явления. Пример такого подхода – шкала времени, в которой 1 секунда = 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующих переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома Цезия-133. За начало отсчёта принимается начало изучаемого явления.

4. Шкала отношений. Эти шкалы описывают свойства эмпирических объектов, которые удовлетворяют отношениям эквивалентности, порядка и аддитивности (шкалы второго рода аддитивные), а в ряде случаев и пропорциональности (шкалы первого рода - пропорциональные). Их примерами является шкала массы (второго рода), термодинамической температуры (первого рода).

В шкалах отношений существует однозначный естественный критерий нулевого количественного проявления свойства и единиц измерений. С формальной точки зрения шкала отношений является шкалой интервалов с естественным началом отсчёта. К значениям, полученным по шкале, применимы все арифметические действия, что имеет важное значение при измерении ФВ.

Шкалы отношений – самые совершенные. Они описываются уравнением $Q = q[Q]$, где *Q* – ФВ, для которой строится шкала; *[Q]* – её единица измерения; *q* – числовое значение ФВ. Переход от одной шкалы отношений к другой происходит в соответствии с уравнением:

$$q_2 = q_1 \frac{[Q_1]}{[Q_2]}.$$

5. Абсолютные шкалы. Под абсолютными понимают шкалы, обладающие всеми признаками шкал отношений, но дополнительно имеющие естественное однозначное определение единицы измерения и не зависящие от принятой системы единиц измерения. Такие шкалы соответствуют относительным величинам: коэффициенту усиления, ослабления и др. Для образования многих производных единиц в системе СИ используются безразмерные и счетные единицы абсолютных шкал.

Шкалы наименований и порядка называют неметрическими (концептуальными), а шкалы интервалов и отношений – метрическими (материальными). Абсолютные и метрические шкалы относятся к разряду линейных. Практическая реализация шкал измерений осуществляется путём стандартизации как самих шкал и единиц измерений, так и, в необходимых случаях, способов и условий их однозначного воспроизведения.

1.2. Системы физических величин и их единиц

В науке, технике и повседневной жизни человек имеет дело с разнообразными свойствами окружающих нас физических объектов. Эти свойства отражают процессы взаимодействия объектов между собой. Их описание производится посредством физических величин. Для того чтобы можно было установить для каждого объекта различия в количественном содержании свойства, отображаемого физической величиной, в метрологии введены понятия ее размера и значения.

Размер физической величины — это количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующего понятию «физическая величина». Например, каждое тело обладает определенной массой, вследствие чего тела можно различать по их массе, т. е. по размеру интересующей нас ФВ.

Значение физической величины получают в результате ее измерения или вычисления в соответствии с основным уравнением измерения $Q = q[Q]$, связывающим между собой значение ФВ Q, числовое значение q и выбранную для измерения единицу $[Q]$.
В зависимости от размера единицы будет меняться числовое значение ФВ, тогда как размер ее будет оставаться неизменным.

Размер единиц ФВ устанавливается законодательно путем закрепления определения метрологическими органами государства.

Важной характеристикой ФВ является ее размерность $dimQ$ - выражение в форме степенного многочлена, отражающее связь данной величины с основными ФВ. Коэффициент пропорциональности принят равным единице:

$$\dim Q = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\eta}$$

где *L*, *M*, *T*, *I* - условные обозначения основных величин данной системы; $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ целые или дробные, положительные или отрицательные вещественные числа. Показатель степени, в которую возведена размерность основной величины, называют показателем размерности. Если все показатели размерности равны нулю, то такую величину называют безразмерной.

Размерность ФВ является более общей характеристикой, чем представляющее ее уравнение связи, поскольку одна и та же размерность может быть присуща величинам, имеющим разную качественную природу и различающимся по форме определяющего уравнения. Например, работа силы *F* на расстоянии *L* описывается уравнением $A_1=FL$. Кинетическая энергия тела массой *m*, движущегося со скоростью *v*, равна $A_2 = \frac{mv^2}{2}$. Размерности этих качественно различных величин одинаковы.

Над размерностями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня. Понятие размерности широко используется:

- для перевода единиц из одной системы в другую;
- для проверки правильности сложных расчетных формул, полученных в результате теоретического вывода;
- при выяснении зависимости между величинами;
- в теории физического подобия.

Описание свойства, характеризуемого данной ФВ, осуществляется на языке других, ранее определенных величин. Эта возможность обусловливается наличием объективно существующих взаимосвязей между свойствами объектов, которые, будучи переведенными на язык величин, становятся моделями, образующими в совокупности систему уравнений, описывающих данный раздел физики.

Различают два типа таких уравнений:

1. Уравнения связи между величинами — уравнения, отражающие законы природы, в которых под буквенными символами понимаются ФВ. Они могут быть записаны в виде, не зависящем от набора единиц измерений входящих в них ФВ:

$$Q = KX^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\gamma} \ldots$$

Коэффициент *K* не зависит от выбора единиц измерении, он определяет связь между величинами. Например, площадь треугольника *S* равна половине произведения основания *L* на высоту *h*: *S=0,5*L*h*. Коэффициент *К*=0,5 появился в связи с выбором не единиц измерений, а формы самих фигур.

2. Уравнения связи между числовыми значениями физических величин - уравнения, в которых под буквенными символами понимают числовые значения величин, соответствующие выбранным единицам. Вид этих уравнений зависит от выбранных единиц измерения. Они могут быть записаны в виде:

$$Q = K_e K X^{\alpha} Y^{\beta} X^{\gamma} ...,$$

где K_e - числовой коэффициент, зависящий от выбранной системы единиц. Например, уравнение связи между числовыми значениями площади треугольника и его геометрическими размерами имеет вид при условии, что площадь измеряется в квадратных метрах, а основание и высота соответственно в метрах и миллиметрах:

*S=0,5*L*h*, т.е. $K = 1$;
или S= 0,5•10^{-6}**L*h,* т. е. *К,* = 10^{-6} $м^2/мм^2$.

Системой физических величин называется совокупность ФВ, образованная в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины принимаются за независимые, а другие являются их функциями.

Обоснованно, но произвольным образом выбираются несколько ФВ, называемые основными. Остальные величины, называемые производными, выражаются через основные на основе известных уравнений связи между ними. Примерами производных величин могут служить: плотность вещества, определяемая как масса вещества, заключенного в единице объема; ускорение — изменение скорости за единицу времени и др.

1.3. Международная система единиц (система СИ)

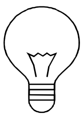
В названии системы ФВ применяют символы величин, принятых за основные. Например, система величин механики, в которой в качестве основных используются длина (L), масса (M) и время (T), называется системой LMT. Действующая в настоящее время международная система СИ должна обозначаться символами LMTIQNJ, соответствующими символам основных величин: длине (L), массе (M), времени (T), силе электрического тока (I), температуре (Q), количеству вещества (N) и силе света (J). Совокупность основных и производных единиц ФВ, образованная в соответствии с принятыми принципами,

называется системой единиц физических величин. Единица основной ФВ является основной единицей данной системы. В Российской Федерации используется система единиц СИ, введенная ГОСТ 8.417-2002.
В качестве основных единиц приняты метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела (табл. 1.1).

Таблица 1.1.

Основные и дополнительные
единицы физических величин системы СИ

Величина			Единица		
Наименование	Размер-ность	Рекомендуемое обозначение	Наименование	Обозначение	
				Русское	Между-народное
Основные					
Длина	L	1	метр	м	m
Масса	M	m	килограмм	кг	kg
Время	T	t	секунда	с	s
Сила электрического тока	I	I	ампер	А	A
Термодинамическая температура	Q	T	кельвин	К	K
Количество вещества	N	n, v	моль	моль	mol
Сила света	J	J	кандела	кд	cd
Дополнительные					
Плоский угол	—	—	радиан	рад	rad
Телесный угол	—	—	стерадиан	ср	sr



Стерадиан - телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы. 1 ср = примерно 0.079'600 полного телесного угла.

Телесный угол - часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью; частными случаями Телесными углами являются трёхгранные и многогранные углы.

Производная единица — это единица производной ФВ системы единиц, образованная в соответствии с уравнениями, связывающими ее с основными единицами или с основными и уже определенными производными.

Восемнадцать производных единиц системы СИ, имеющих собственное название, в честь ученых предложивших их, приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2.

Производные единицы системы СИ, имеющие специальное название

Величина	Единица			
Наименование	Размер-ность	Наиме-нование	Обозна-чение	Выражение через единицы
Частота	T^{-1}	Герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	LMT^{-2}	Ньютон	Н	$мкгс^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	Паскаль	Па	$м^{-1}кгс^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	$L^{2}MT^{2}$	Джоуль	Дж	$м^{2}кгс^{2}$
Мощность	$L^{2}MT^{-3}$	Ватт	Вт	$м^{2}кгс^{-3}$
Количество электричества	TI	Кулон	Кл	$сА$
Электрическое напряжение, потенциал, электродвижущая сила	$L^{2}MT^{-3}I^{-1}$	Вольт	В	$м^{2}кгс^{-3}А^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	Фарад	Ф	$м^{-2}кг^{-1}с^{4}А^{2}$
Электрическое сопротивление	$L^{2}MT^{-3}I^{-2}$	Ом	Ом	$м^{2}кгс^{-3}А^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}$	Сименс	См	$м^{-2}кг^{-1}{}^{*}с^{-}$
Поток магнитной индукции	$L^{2}MT^{-2}I^{-1}$	Вебер	Вб	$м^{2}кг^{-2}А^{-1}$
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	Тесла	Тл	$кгс^{-2}А^{-1}$
Индуктивность	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	Генри	Гн	$м^{2}кгс^{-2}А^{-2}$
Световой поток	J	Люмен	лм	кдср
Освещенность	$L^{-2}J$	Люкс	лк	$м^{-2}кд*ср$
Активность радионуклида	T^{-1}	Беккерел ь	Бк	$С^{-1}$
Поглощенная доза ионизирующего излучения	$L^{2}T^{-2}$	Грей	Гр	$м^{2}с^{-2}$
Эквивалентная доза излучения	$L^{2}T^{-2}$	Зиверт	Зв	$м^{2}с^{-2}$

Для установления производных единиц следует:

- выбрать ФВ, единицы которых принимаются в качестве основных;
- установить размер этих единиц;
- выбрать определяющее уравнение, связывающее величины, измеряемые основными единицами, с величиной, для которой устанавливается производная единица. При этом символы всех величин, входящих в

определяющее уравнение, должны рассматриваться не как сами величины, а как их именованные числовые значения;

- приравнять единице (или другому постоянному числу) коэффициент пропорциональности K_e, входящий в определяющее уравнение. Это уравнение следует записывать в виде явной функциональной зависимости производной величины от основных.

Установленные таким способом производные единицы могут быть использованы для введения новых производных величин. Поэтому в определяющие уравнения наряду с основными единицами могут входить и производные, единицы которых определены ранее.

Производные единицы бывают когерентными и некогерентными. Когерентной называется производная единица ФВ, связанная с другими единицами системы уравнением, в котором числовой множитель принят равным единице. Например, единицу скорости образуют с помощью уравнения, определяющего скорость прямолинейного и равномерного движения точки: $v = L/t$, где L - длина пройденного пути; t - время движения. Подстановка вместо L и t их единиц в системе СИ дает v=1м/с. Следовательно, единица скорости является когерентной.

Если уравнение связи содержит числовой коэффициент, отличный от единицы, то для образования когерентной единицы системы СИ в правую часть уравнения подставляют величины со значениями в единицах СИ, дающие после умножения на коэффициент общее числовое значение, равное единице. Например, если для образования когерентной единицы энергии применяют уравнение $E=0,5/mv^2$, где m - масса тела; v - его скорость, то когерентную единицу энергии можно образовать двумя путями:

$$E=\frac{2mv^2}{2}=\frac{(1\cdot 2кг\cdot м/с)^2}{2}=1(кг\cdot м^2/с^2)=1Дж$$

$$E=\frac{m(2v^2)}{2}=\frac{(1кг)2(м/с)^2}{2}=1(кг\cdot м^2/с^2)=1Дж$$

Следовательно, когерентной единицей СИ является джоуль, равный ньютону, умноженному на метр. В рассмотренных случаях он равен кинетической энергии тела массой 2 кг, движущегося со скоростью 1 м/с, или тела массой 1 кг, движущегося со скоростью $\sqrt{2}$ м/с.

Единицы ФВ делятся на системные и внесистемные. Системная единица - единица ФВ, входящая в одну из принятых систем. Все основные, производные, кратные и дольные единицы являются системными. Внесистемная единица - это единица ФВ, не входящая ни в одну из принятых систем единиц. Внесистемные единицы по отношению к единицам СИ разделяют на четыре вида:

- допускаемые наравне с единицами СИ, например: единицы массы - тонна; плоского угла - градус, минута, секунда; объема - литр и др. Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ, приведены в табл. 1.3;
- допускаемые к применению в специальных областях, например: астрономическая единица, парсек, световой год - единицы длины в астрономии; диоптрия - единица оптической силы в оптике; электрон-вольт - единица энергии в физике и т.д.;
- временно допускаемые к применению наравне с единицами СИ, например: морская миля - в морской навигации; карат - единица массы в ювелирном деле и др. Эти единицы должны изыматься из употребления в соответствии с международными соглашениями;
- изъятые из употребления, например: миллиметр ртутного столба - единица давления; лошадиная сила — единица мощности и некоторые другие.

Таблица 1.3.

Внесистемные единицы, допускаемые
к применению наравне с единицами СИ

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
1	2	3	4
Масса	тонна	т	10^3кг
	атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг (приблизительно)
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3 600 с
	сутки	сут.	86 400 с
Угол плоский	градус	0	(π /180) рад = 1,745329... *
	минута	’	(π /10800) рад = 2,908882... *
	секунда	’’	(π /648000) рад = 4,848137... *
	град	град	(π /200) рад

1	2	3	4
Объем	литр	л	10^{-3} м^3
Длина	астрономическая единица	а. е.	1,45598*10^{11} м (приблизительно)
	световой год	св. год	9,4605*10^{15} м (приблизительно)
	парсек	пк	3,0857*10^{16} м (приблизительно)
Оптическая сила	диоптрия	дптр	1м$^{-1}$
Площадь	гектар	га	10^4м2
Энергия	электрон-вольт	эВ	1,60219*10 ^{19}Дж (приблизительно)
Полная мощность	вольт-ампер	ВА	—
Реактивная мощность	вар	вар	—

Различают кратные и дольные единицы ФВ. Кратная единица это единица ФВ, в целое число раз превышающая системную или внесистемную единицу. Например, единица длины километр равна 10^3 м, т. е. кратна метру. Дольная единица - единица ФВ, значение которой в целое число раз меньше системной или внесистемной единицы. Например, единица длины миллиметр равна 10^{-3} м, т. е. является дольной. Приставки для образования кратных и дольных единиц приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение приставки		Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		Международное	русское			Международное	русское
10^{18}	экса	E	Э	10^{-1}	деци	d	д
10^{15}	пета	P	П	10^{-2}	санти	c	с
10^{12}	тера	T	Т	10^{-3}	милли	m	м
10^9	гига	G	Г	10^{-6}	микро	μ	мк
10^6	мега	M	м	10^{-9}	нано	n	н
10^3	кило	k	к	10^{-12}	пико	P	п
10^2	гекто	h	г	10^{-15}	фемто	f	ф
10^1	дека	da	да	10^{-18}	атто	a	а

1.4. Воспроизведение единиц физических величин

При проведении измерений необходимо обеспечить их единство. Под единством измерений понимается характеристика качества измерений, заключающаяся в том, что их результаты выражаются в узаконенных единицах, размеры которых в установленных пределах равны размерам воспроизведённых величин, а погрешности результатов измерений известны с заданной вероятностью и не превышают установленных пределы.

Понятие единства измерений довольно ёмкое. Оно охватывает основные задачи метрологии: унификацию единиц ФВ, разработку систем воспроизведения величин и передачи их размеров рабочим средствам измерений с установленной точностью и ряд других вопросов.

Единство измерений должно обеспечиваться при любой точности, необходимой науке и технике.

На государственном уровне деятельность по обеспечению единства измерений регламентируется стандартами государственной системы обеспечения единства измерений (ГСИ) или нормативными документами органов метрологической службы.

Для обеспечения единства необходима тождественность единиц измерения. Это достигается хранением и воспроизведением в специальных учреждениях установленных единиц ФВ и передачи их размеров применяемым СИ.

Воспроизведение единицы физической величины – совокупность операций по материализации единицы ФВ с наивысшей точностью посредством государственного эталона или исходного образцового СИ (воспроизведение основной и производной единиц).

Воспроизведение основной единицы – воспроизведение единицы путём создания фиксированной по размеру ФВ в соответствии с определением единицы (государственные первичные эталоны).

Например, 1 килограмм – мера воспроизведена в виде платиново-иридиевой гири, хранимой в Международном бюро мер и весов (международный эталон).

Последнее международное сличение показало, что гиря, входящая в состав государственного эталона РФ, составила 1,000000087 кг.

Воспроизведение производной единицы – это определение значения ФВ в указанных единицах на основании косвенных измерений других величин, функционально связанных с измеряемой. Так воспроизведение силы Ньютона осуществляется на основании известного уравнения механики $F=mg$, где m – масса, g – ускорение свободного падения.

Передача размера единицы – это приведение размера единицы, хранимой поверяемым средством измерений, к размеру единицы, воспроизводимой или хранимой эталоном, осуществляемое при поверке или калибровке. Размеры единицы передаются “сверху вниз” – от более точных СИ к менее точным.

Хранение единицы – совокупность операции, обеспечивающих неизменность во времени размера единицы, присущего данному СИ. При хранении первичного эталона выполняются регулярные его исследования, сличения с эталонами других стран с целью повышения точности воспроизведения единицы и совершенствования передачи её размера.

1.5. Эталоны единиц

Эталон - средство измерений (или комплекс СИ), предназначенные для воспроизведения и (или) хранения единицы и передачи её размера нижестоящим по поверочной схеме СИ и утвержденное в качестве эталона в установленном порядке.

Перечень эталонов не повторяет перечня ФВ. Для ряда единиц эталоны не создаются из-за того, что нет возможности непосредственно сравнить соответствующие ФВ (например, не эталона площади).

Эталон должен обладать минимум тремя взаимосвязанными свойствами: *неизменностью*, *воспроизводимостью* и *сличаемостью*.

Неизменность - свойство эталона удерживать неизменным размер воспроизводимой им единицы в течение длительного интервала времени.

Воспроизводимость - возможность воспроизведения единицы ФВ (на основе ее теоретического определения) с наименьшей погрешностью для существующего уровня развития измерительной техники. Это достигается путем постоянного исследования эталона в целях определения систематических погрешностей и их исключения путем введения соответствующих поправок.

Сличаемость – возможность сравнения (сличения) с эталоном других СИ, нижестоящих по поверочной схеме, в первую очередь вторичных эталонов, с наивысшей точностью для существующей техники измерения. Эталон не вносит искажений в результат сличения и сам не изменяет своих свойств при сличении.

Различают следующие виды эталонов (РМГ-29-99) (6 видов):

- *первичный* – обеспечивает хранение и воспроизведение с наивысшей в стране (по сравнению с другими эталонами) точностью. Первичные эталоны это уникальные СИ, часто представляющие собой сложнейшие измерительные комплексы, созданные с учётом новейших достижений науки и техники. Они составляют основу государственной системы обеспечения единства измерений;
- *международный* – эталон, принятый по международному соглашению в качестве международной основы для согласования с ним размеров единиц, воспроизводимы и хранимых национальными эталонами;
- *государственный или национальный* – это первичный эталон, официально утверждённый в качестве исходного для страны. Государственные эталоны подлежат периодическому сличению с государственными эталонами других стран. *Национальный эталон* – эталон прошедший сличение с эталонами отдельных государств, с международным эталоном или при проведении так называемых круговых сличений эталонов ряда стран (например, эталон стран СНГ - национальный);
- *вторичный эталон* – хранит размер единицы, полученной путём сличения с первичным эталоном соответствующей ФВ. Создаются для организации поверочных работ и для обеспечения сохранности и наименьшего износа государственного эталона. Вторичный и рабочий эталоны являются исходными для министерства (ведомства), их иногда называют ведомственным эталоном. Совокупность государственных первичных и вторичных эталонов – есть эталонная база страны;
- *эталон сравнения* – применяется для сличения эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть непосредственно сличаемы друг с другом;
- *рабочий эталон* – применяются для передачи размера единицы рабочим средствам измерений. Это самые распространённые эталоны. С целью повешения точности измерений ФВ рабочие эталоны применяются во многих территориальных метрологических органах и лабораториях министерств и ведомств.

В зависимости от количества СИ, входящий в эталон, различают:

- *одиночный эталон*, в составе которого имеется одно СИ (мера, измерительный прибор, эталонная установка) для воспроизведения и (или) хранения единицы;
- *групповой эталон*, в состав которого входит совокупность СИ одного типа, номинального значения и диапазона измерений;
- *эталонный набор*, состоящий из совокупности СИ, позволяющий воспроизводить и (или) хранить единицу в диапазоне, представляющем объединение диапазонов указанных средств. Например, эталонные разновесы (набор эталонных гирь), эталонные наборы ареометров.

Так же можно выделить:

- *специальный эталон* воспроизводит единицу в особых условиях и заменяет в этих условиях первичный эталон. Применяется, когда прямая передача размера единицы от существующих эталонов технически не осуществима с требуемой точностью (высокие и сверхвысокие частоты, давления, температуры, особые состояния вещества, крайние участки диапазона измерений и т.п.);
- *эталон-свидетель* применяется для проверки сохранности государственного эталона и для замены его в случае порчи или утраты;
- *эталон-копия* предназначен для хранения единицы и передачи ее размера рабочим эталонам. Например, в Россию передан эталон – копия единицы массы (килограмма) в виде платиново-иридиевой гири № 26 и рабочий эталон килограмма, изготовленный из нержавеющей стали.

Размеры единиц могут воспроизводиться там же, где выполняются измерения (лабораторные, на предприятие), либо информация о размере единицы должна передаваться с места их централизованного хранения или воспроизведения. В зависимости от этого различают *децентрализованное и централизованное воспроизведение единиц*.

Децентрализовано воспроизводятся единицы многих производных физических величин. Основные единицы в настоящее время воспроизводятся только централизованно.

Централизованное воспроизведение единиц осуществляется с помощью единых для всей страны государственных эталонов.

К государственным эталонам относятся:

- эталон единицы массы – килограмма;
- эталон единицы длины – метра;
- эталон единицы времени и частоты;
- эталон единицы температуры Кельвина;
- эталон единицы силы электрического тока – ампера;
- эталон единицы силы света – канделы;

Моль не воспроизводится, нет эталона. Его воспроизведение не требуется. Например единица массы – килограмм – воспроизводится до сих пор гирей из платиново-иридиевого сплава (90% Pt и 10% Ir), изготовленной в 1883 г. английской фирмой «Джонсон, Матей и Ко» и полученной по требованию Россией в 1889 г. согласно метрической конвенции. Гиря имеет форму цилиндра с высотой и диаметром основания равным 39 мм. Она храниться на кварцевой подставке под двумя стеклянными колпаками в стальном шкафу особого сейфа, находящегося в термостатическом помещении.

В состав государственного первичного эталона единицы массы, кроме гири, входят эталонные весы, на которых один раз в 10 лет с помощью манипуляторов дистанционно сличаются с эталонной гирей эталоны – копии. Несмотря на все предосторожности за 90 лет масса эталонной гири со стандартным отклонением (1…2)*10-8 кг. увеличилась на 0,02 мг. из-за оседании пыли, образования тонкой коррозионной пленки, адсорбции молекул из окружающей среды.

В качестве эталона единицы электрического тока – ампера приняты токовые весы. Эта единица воспроизводится следующим образом. Токовые весы представляют собой рычажные равноплечие весы, в которых подвижная катушка, уравновешивается грузом, положенным на правую чашку весов. Подвижная катушка входит во вторую неподвижную коаксиально расположенную катушку. При прохождении по этим последовательно соединенным катушкам постоянного электрического тока подвижная катушка втягивается (опускается), поэтому на правую чашку весов нужно положить груз. По массе добавочного груза и судят о силе электрического тока, проходящего по катушкам. Согласно расчетам при массе уравновешивающих гирь около 8 г сила электрического тока составляет 1А. стандартное отклонение (погрешность случайной величины) при воспроизведении ампера государственным первичным эталоном не превышает $4*10^{-6}$А.

Передача размеров единиц от эталонов рабочим мерам и измерительным приборам осуществляется посредством образцовых средств измерений.

Образцовые СИ представляют собой меры, измерительные приборы или измерительные преобразователи, предназначенные для поверки и градуировки по ним других средств измерений и в установленном порядке утвержденные в качестве образцовых.

Образцовые СИ хранят и применяют органы государственной метрологической службы и органы отраслевых (ведомственных) метрологических служб. На образцовые СИ выдаются свидетельства с указанием метрологических параметров и разряда по поверочной схеме (1-го, 2-го, 3-го, 4-го, и т.д.).

На рисунке 1.4 показана метрологическая цепь передачи размеров единиц от первичных эталонов рабочим эталонам, а от них разрядным образцовым средствам измерений и далее – рабочим мерам и измерительным приборам.

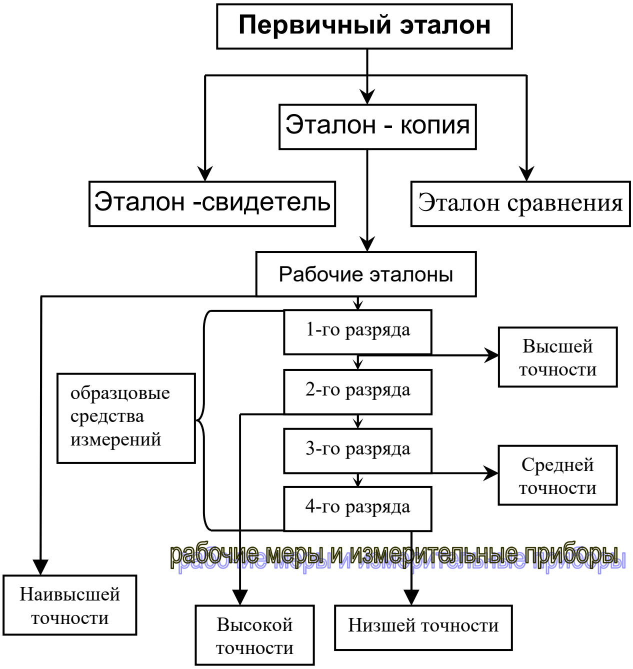


Рис. 1.4. Метрологическая цепь передачи размеров единиц

Применение для практических измерений средств передачи, информации о размере единицы и эталонов запрещено.

Для передачи информации о размере единицы рабочие средства измерений использовать нельзя.

Эталоны не доступны специалистам на производстве, а средства измерений не могут быть аттестованы по более высокому классу точности, чем средства, с помощью которых они аттестуются. Между тем, на каждой ступени передачи информации размере единицы, точность теряется в 1,25…5 раз (иногда 10 раз). Таким образом, при многоступенчатой передаче эталонам точность не доходит до потребителя.

Для того чтобы снизить потери точности при передаче информации используют поверку СИ.

Поверкой средства измерений называют совокупность действий, выполняемых для определения и оценки погрешности средств измерений с целью выяснить, соответствуют ли их метрологические характеристики регламентированным значениям и пригодно ли средство измерения к применению. В соответствии с законом РФ "Об обеспечении единства измерений" средства измерений, подлежащие государственному метрологическому контролю и надзору, подвергаются поверке при выпуске из производства или ремонта, при ввозе по импорту и эксплуатации допускаются продажа и выдача на прокат только поверенных средств измерений.

Поверка проводится физическим лицом, аттестованным в качестве поверителя в соответствии с ПР 50.2.012-94 «ГСИ. Порядок аттестации поверителей средств измерений» по нормативным документам, утверждаемым по результатам испытаний с целью утверждения типа.

Результат поверки – подтверждение пригодности средств измерений к применению или признания средства измерений непригодным к применению. Если средства измерений по результатам поверки признано пригодным к применению, то на него и (или) техническую документацию наносится оттиск поверительного клейма и (или) выдается "Свидетельство о поверке" аннулируется и выписывается "Извещение о непригодности" или делается соответствующая запись в технической документации.

Вид поверки средств измерений определяют в зависимости от следующих факторов: какой метрологической службой произведена (государственной или ведомственной); на каком этапе работы средства измерений (первичный, периодический, внеочередной); от характера поверки (инспекционная, экспертная).

2 Основы техники измерений

2.1. Модель измерения

Измерения являются одним из путей познания окружающего мира. Они дают его количественную характеристику. Д.И. Менделеев сказал: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немыслима без меры». Потребность в метрологии возникла с древнейших времен. Слово метрология образовано из двух греческих слов: «метро» – мера, «логос» - учение. Дословный перевод слова метрология – учение о мерах.

Метрология в современном понимании - наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способов достижения требуемой точности.

Важнейшей задачей метрологии является обеспечение единства и необходимой точности измерений. Эта задача может быть решена при соблюдении двух условий, которые можно назвать основополагающими:

- выражение результатов измерений в единых узаконенных единицах
- установление допустимых ошибок (погрешностей) результатов измерений за которые они не должны выходить при заданной вероятности.

Единство измерений – такое состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности измерений известны с заданной вероятностью.

Единство измерений необходимо для того, чтобы можно было сопоставлять результаты измерений, выполненных в разных местах, в разное время, с использованием разных методов средств измерений.

Точность измерений характеризуется близостью результатов к истинному значению измеренной величины. Точные измерения неоднократно позволяли делать фундаментальное открытие. Они имеют большое значение для прогресса в естественной и технической науки.

По сути, измерение это фиксирование какого либо свойства рассматриваемого объекта. Для случая металлургической отрасли рассматриваемый объект материален, следовательно, обладает свойствами характерными для материальных объектов.

Исследуемое свойство такого объекта можно зафиксировать в том случае, когда оно оказывает влияние на чувствительный элемент измерительного преобразователя (рис. 2.1).

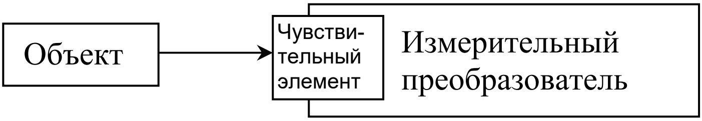


Рис. 2.1. Фиксирование свойства объекта измерительным преобразователем

Чтобы получить информацию об измеряемом свойстве объекта необходимо потратить на это энергию. Эта энергия может быть энергией самого свойства, в таком случае не нужно привлекать дополнительные её источники для измерения; либо такая энергия должна быть предоставлена измерительным преобразователем.

Исходя из этого выделяют пассивные и активные величины, а также пассивные и активные преобразователи. Пассивный преобразователь использует энергию активной величины, а активный преобразователь имеет собственный источник питания для проведения измерения, т.к. он измеряет пассивную величину (рис 2.2).

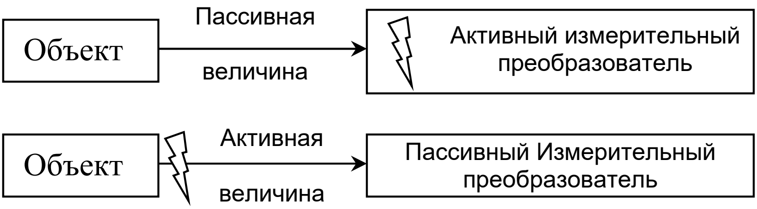


Рис. 2.2. Энергетические состояния измерения

Возникновение информации о величине основано на принципе энергетического обмена, а любой обмен энергией в природе приводит к её преобразованию. К сожалению, её преобразование невозможно без потерь. Именно поэтому возникают ошибки измерения, с которыми нужно «бороться».

Бороться с ошибками становиться легче, когда мы используем для получения измеренного значения величины адекватные методы измерения и преобразования информации.

Большое значение имеют и качественные средства измерений, привносящие минимум отклонений в процессе измерения.

Итак, *моделью измерения* можно назвать совокупность средств и методов измерения обеспечивающих заданное качество процесса и результата измерения.

Такое качество оценивается погрешностями измерения и метрологическими характеристиками средств измерений.

Со временем, изучая измерительные процессы были предложены, разработаны и обоснованы определенные виды и методы измерений.

2.2. Виды и методы измерений

Вид измерений определяются физическим характером измеряемой величины, требуемой точностью измерения, необходимой скоростью измерения, условиями и режимом измерения и т.д.

Измерение есть нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Во всех случаях проведения измерений независимо от измеряемой величины, метода и средств измерений, измерение происходит путем сравнения опытным путем данной величины с другой ей подобной принятой за единицу. Т.е. при всяком измерении мы с помощью эксперимента оцениваем физическую величину в виде некоторого числа принятых для нее единиц.

Есть измерения органолептические – основанные на ощущениях, эвристические – основанные на интуиции – экспертный метод.

Однако вполне объективными могут считаться только измерения выполненные без участия человека.

Измерения, выполняемые с помощью специальных технических средств, называются инструментальными. Среди них могут быть автоматизированные и автоматические. При автоматизированных измерениях роль человека полностью не исключена. Автоматические измерения выполняются без участия человека. Результаты их представляются в форме документа. Но стоимость таких измерений велика и целесообразность автоматизации измерений должна быть экономически обоснована.

В метрологии существует множество видов измерений – их число постоянно увеличивается.

Общая классификация видов измерений представлена на рисунке 2.3.

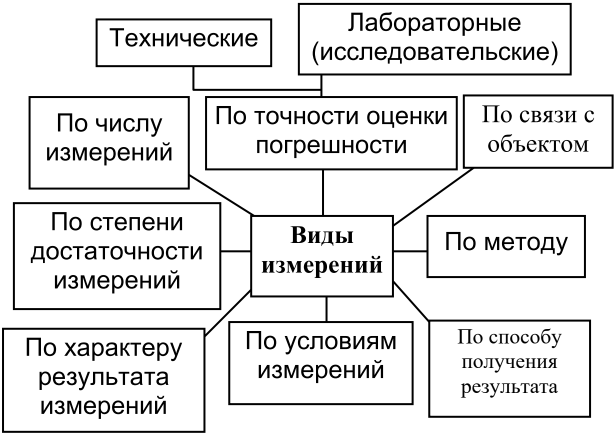


Рис. 2.3. Классификация видов измерений

Виды измерений могут быть классифицированы:
по числу измерений:
- многократные;
- однократные;

по точности оценки погрешности:
- технические;
- лабораторные (исследовательские);

по виду связи с объектом:
- контактные;
- бесконтактные;

по методу измерений:
- непосредственной оценки (прямой метод);
- сравнение с мерой;
- противопоставления;
- дифференциальный;
- нулевой;
- замещения (совпадений);
- и т.д.

по способу получения результата:
- прямые;
- косвенные;
- совокупные;
- совместные;
- динамические;

по условиям измерений:
- равноточные;

неравноточные;
по характеру результата измерений:
абсолютные;
допусковые (пороговые);
относительные;
по степени достаточности измерений:
необходимые;
избыточные.

Прежде чем более подробно остановиться на классификации видов измерений обратим внимание на следующие термины и определения.

- *Принцип измерения* – физических явлений или совокупность физических явлений, положенных в основу измерения (например, взвешивание с использованием силы тяжести, пропорциональной массе, фотоэффект);
- *Метод измерения* – совокупность приемов использования принципов и средств измерения; совокупность приемов сравнения измеряемой физической величины с ее единицами в соответствии с реализованным принципом измерений.
- *Погрешность измерений* – разность между полученным при измерении и истинным значением измеряемой величины. Погрешность измерений вызывается несовершенством методов и средств измерений, непостоянством условий, несовершенством наблюдателя и особенностями его органов чувств.
- *Точность измерений* – это характеристика измерений, отражающая близость их результатов к истинному значению измеряемой величины. Чем меньше погрешность, тем выше точность измерений.

Измерения могут быть *однократные* и *многократные.* При этом важно знать, что однократные измерения производятся тогда, когда процесс измерения данной величины хорошо изучен и заранее известны погрешности и поправки, которые необходимо вводить для уточнения результата измерения. Более надёжными (обладающие меньшей систематической погрешностью) являются многократные измерения, потому как при увеличении числа измерений одной и той же неизменной (в процессе измерения) величины математическое ожидание всех измерений будет стремиться к истинному значению величины, а при бесконечном числе измерений будет с ним совпадать. То есть в идеальном (но недостижимом практически) случае бесконечное число измерений даст нам абсолютно точное значение величины, поэтому число измерений стоит разумно и обосновано увеличивать.

Ввиду того, что однократные измерения самые дешевые их чаще всего используют там, где не требуется высокая точность измерений – это могут быть технические измерения. При повышенных требованиях к точности измерений говорят о, так называемой, лабораторной или исследовательской точности (свыше 95 измерений из 100 будут обладать заданной высокой точностью). При этом допускается точное или приближенное оценивание погрешности.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения могут быть статическими, при которых измеряемая величина остается постоянной во времени (например, измерение размеров тела, постоянного давления) и динамическими, когда измеряемая величина непостоянно во времени (например, пульсирующее давление, вибрация).

По способу получения результатов измерений их разделяют на *прямые*, *косвенные*, *совокупные* и *совместные*.

Прямые – это измерения, при которых значение физической величины находят непосредственно из опытных данных (например, измерение длины с помощью линейки, температуры с помощью термометра, массы с помощью весов). Уравнение прямого измерения: $y = Cx$, где C – цена деления СИ. Эти измерения составляют основу более сложных – косвенных совокупных и совместных.

Косвенные – это измерения при которых значение величины находят на основании известной зависимости между искомой величиной и величинами которые находят прямым измерением (например, определение объема по прямым измерениям его геометрических размеров). Косвенные измерения выполняют в тех случаях, когда искомую величину невозможно или сложно измерить непосредственно, или когда прямое измерение дает менее точный результат. Высока роль косвенных измерений при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению (внутриатомного порядка). Уравнение косвенного измерения: $y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$, где x_i – i-ый результат прямого измерения.

Совокупные – это производимые одновременно измерения искомых одноименных величин, при которых искомую величину определяют решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин. Например, при определении взаимоиндуктивности катушки M используют два метода: сложения и вычитания полей. Если индуктивность одной из них L_1, а другой – L_2, то находят: $L_{01} = L_1 + L_2 + 2M$ и $L_{02} = L_1 + L_2 - 2M$, откуда $M = \frac{(L_{01} - L_{02})}{4}$. Похожим образом вычисляется общий уровень шума нескольких его источников.

Совместные – это производимые одновременно измерения двух или нескольких неодноименных величин для нахождения зависимостей между ними. Например, измерение сопротивления R_1 при фиксированной температуре t происходит по формуле:

$R_1 = R_0(1+\alpha\Delta t)$, где R_0 и α – сопротивление при известной температуре t_0 (обычно 20°С) и температурный коэффициент есть величины постоянные, измеренные косвенным методом; $\Delta t = t - t_0$ - разность температур; t – заданное значение температуры, измеренное прямым методом.

По условиям, определяющими точность результата измерения делятся на 3 класса:

1. *измерение максимально возможной точности*, достижимо при существующем уровне техники. К ним относятся в первую очередь эталонные измерения связанные с воспроизведением физической величины с максимально возможной точностью измерения физических констант, а также некоторые специальные измерения.
2. *контрольно поверочные измерения* погрешность которых с определенной вероятностью не должны превышать некоторое заданное значение. К ним относятся измерения выполняемые лабораториями государственного надзора за состоянием измерительной техники, заводскими измерительными лабораториями. Эти измерения гарантируют погрешность результата с определенной вероятностью, не превышающего некоторого заранее заданного значения.
3. *технические измерения*, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений. Эти измерения выполняются в процессе производства на предприятиях, на щитах распределительных устройств электростанций и др.

По способу выражения результатов измерения различают *абсолютные*, *относительные* и *допусковые* (*пороговые*) измерения.

Абсолютными называют измерения, которые основаны на прямых измерениях одной или нескольких основных величин или на использовании значений физических констант (например, определение длины в *м*, силы электрического тока в *А*, ускорение свободного падение $м/с^2$).

Относительными называют измерения отношения одноименных величин к величине, играющей роль единицы.

Результатом *допускового* или порогового измерения является информация о том, попадает ли измеряемая величина в заданный диапазон или нет, больше она какого либо значения или меньше.

По условиям измерения выделяют равноточные и неравноточные измерения. Равноточные измерения могут производиться в разное время, в разные местах и иметь в итоге одинаковую точность. Результаты неравноточные измерения не могут быть сопоставимы.

По виду связи с объектом измерения могут быть *контактные* и *бесконтактные*.

Контактные измерения, как правило, дают большую точность, однако непосредственный контакт может привести к преждевременному выходу из строя оборудования, т.к. происходит взаимодействие СИ и объекта измерения (например, выход из строя термопары при контактном измерении высоких температур тела).

Бесконтактное же измерение имеет меньшую точность (в виду необходимости введения поправок), однако исключает, возможно небезопасный, контакт СИ и объекта (например измерение температуры пирометром).

По степени достаточности измерений можно выделить *необходимые* и *избыточные*.

Необходимые измерения обеспечивают, заранее определенную, точность, правильность и достоверность. То есть их количество достаточно для заданных условий.

Избыточные же измерения по количеству превышают необходимые, что может привести к достаточно высоким расходам на измерительный процесс. Следует заранее определять количество измерений, которое связано с требованиями к качеству результата измерения.

Существует большое количество методов измерений. Рассмотрим самые применяемые и распространенные из них.

Прямые измерения есть основа сложных измерений и поэтому целесообразно рассмотреть методы прямых измерений (согласно РМГ 29-99).

Метод непосредственной оценки, при котором значение величины определяют непосредственно по отсчётному устройству измерительного прибора, например, измерения давления пружинным манометром, массы – на весах, силы электрического тока – амперметром.

Метод сравнения с мерой – измеряемую величину сравнивают с величиной воспроизводимой меры. Например, измерение массы на рычажных весах с уравновешивающей гирей; измерение напряжения постоянного тока на компенсаторе сравнением с ЭДС параллельного элемента.

Метод дополнения. Значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчётом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значения.

Дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод позволяет получить результат высокой точности при использовании относительно грубых средств измерения.

Пример: Измерить длину стержня *X* если известна длина *l* (зная что *l* < *X*) меры.

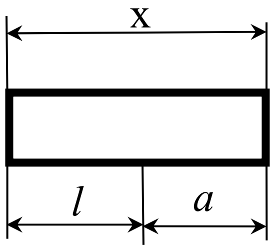


Рис. 2.4. Пояснения к дифференциальному методу

$x = l + a$ (*a* – измеряемая величина).

Действительные значения $a_д$ будут отличаться от измеренного *a* на величину погрешности Δ.

$$a_Д = a \pm \Delta = a\left(1 \pm \frac{\Delta}{a}\right)$$

Тогда

$$x = l + a \pm \Delta = (l + a)\left(1 \pm \frac{\Delta}{l + a}\right)$$

Поскольку $l >> a$, то $\frac{\Delta}{l+a} << \frac{\Delta}{a}$

Пусть Δ =0,1 мм; l =1000, a =10 мм.

Тогда $\frac{0,1}{1010} = 0,0001(0,01\%) << \frac{0,1}{10} = 0,01(1\%)$.

Нулевой метод аналогичен дифференциальному, но разность между измеряемой величиной и мерой сводиться к нулю. При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины.

Рассмотрим примеры – неравноплечные весы,

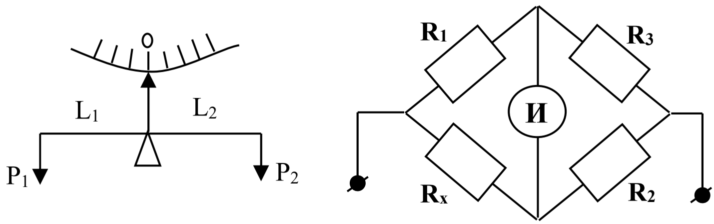


Рис. 2.5. Неравноплечные весы (а), Мост Уинстона (б)

где $P_1 l_1 = P_2 l_2$ (см. рис. 2.5,а). В электронике это мосты для измерения индуктивности, ёмкости, сопротивления ($R_1 R_2 = R_x R_3$) (см. рис. 2.5,б) где, в общем случае, совпадение величин регистрируется нуль индикатором.

Метод замещения – метод сравнения с мерой, в которой измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой. Например, взвешивание с поочерёдным помещением измеряемой массы и гирь на одну и ту же чашу весов.

3 Погрешности измерений

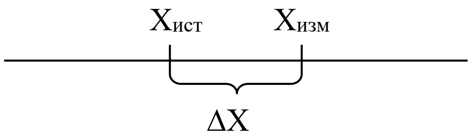
Погрешность средств измерений – разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины.

Истинное значение величины – это значение, идеальным образом отражающее свойство данного объекта, как в количественном, так и в качественном отношении.

Для меры показанием является её номинальное значение. Номинальным значением средства измерения является значение физической величины определенное, в соответствии с паспортом средства измерения.

На практике измерить вещественные значения физических величин материальных объектов не представляется возможным, т.к. существует множество факторов влияющих на результат измерения.

На рисунке 3.1. представлено отклонение измеренного значения величины от истинного значения, где ΔX – погрешность



измерения.

Рис. 3.1. Истинное и измеренное значения

Величина погрешности зависит от множества факторов, которые можно разделить на две категории:

- предсказуемые;
- непредсказуемые.

Предсказуемые факторы – это влияния, оказываемые на процесс измерения, которые хорошо изучены и с помощью введения поправок в результат измерения могут быть практически полностью исключены. Это систематическая погрешность.

Непредсказуемые факторы – это малоизученные воздействия на процесс измерения одновременно или поочередно нескольких факторов, что приводит к возникновению случайной погрешности.

Поскольку истинное значение физической величины неизвестно, то на практике пользуются ее действительным значение (с учетом погрешностей).

Для сравнительной оценки средств измерений используется понятие точность средства измерения, как характеристику качества средства измерений, отражающую близость его погрешности к нулю.

3.1. Классификация погрешностей

В общем случае погрешности измерений могут быть классифицированы по форме числового выражения и по закономерности проявления (рис. 3.2).

Рис. 3.2. Общая классификация погрешностей измерения

По форме числового выражения выделяют три вида погрешностей.

Абсолютная погрешность – погрешность средства измерений, выраженная в единицах измеряемой физической величины.

$$\Delta = X_И - X_Д ,$$

где $X_И$ – измеренная величина, $X_Д$ – действительная величина. Измерение действительного значения производится с помощью образцового прибора или воспроизводиться мерой.

Относительная погрешность – погрешность средства измерений, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к результату измерений как к действительному значению измеренной физической величины. Относительную погрешность, как правило, выражают в процентах.

$$\delta = \left| \frac{(X_И - X_Д)}{X_Д} \right| \cdot 100\% ,$$

где $X_И$ – измеренная величина, $X_Д$ – действительная величина.

Приведенная погрешность – относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины (нормирующему значению), постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Приведенную погрешность также выражают в процентах.

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\% ,$$

где X_N – нормирующее значение измеряемой величины.

По закономерности проявления выделяют три вида погрешностей.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности средства измерений, принимаемая постоянной или закономерно изменяющейся.

Случайная погрешность – составляющая погрешности средства измерений, изменяющаяся непредсказуемо - случайным образом.

Грубая погрешность – погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях погрешность. Сюда относятся так же и промахи. *Промахи* – погрешности, зависящие от наблюдателя и связанные с неправильным обращением со средствами измерений, неверным отсчетом показаний или ошибками при записи результатов.

Систематические и случайные погрешности будут более подробно рассмотрены далее.

В зависимости от условий применения и режимов измерений можно выделить также следующие виды погрешностей:

- основные;
- дополнительные;
- статические;
- динамические.

Основная погрешность – погрешность средства измерений, применяемого в нормальных условиях.

Нормальными условиями применения средств измерений называют условия, при которых влияющие величины имеют номинальные значения или находятся в пределах нормальной области значений. Нормальные условия применения указываются в стандартах или технических условиях применения на средства измерений. При использовании средств измерений в нормальных условиях считают, что влияющие на них величины практически никак не изменяют их характеристики. Для многих типов средств измерений нормальными условиями являются – температура (293 ± 5)К, относительная влажность (65 ± 15)%, напряжение в сети питания – 220 В ± 10 %.

Дополнительная погрешность – составляющая погрешности средства измерений, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального её значения или вследствие её выхода за пределы нормальной области значений. Дополнительная погрешность может быть вызвана изменением сразу нескольких величин. Дополнительная погрешность – это часть погрешности, которая добавляется посредством алгебраического сложения к основной в случаях, когда измерительное устройство применяется в рабочих условиях.

Рабочие условия обычно таковы, что изменения значений влияющих величин для них существенно больше, чем для нормальных условий, то есть область рабочих условий включает в себя область нормальных условий. В некоторых случаях основная погрешность измерительного устройства определяется для рабочей области изменения значений влияющих величин. В этих случаях понятие дополнительной погрешности теряет смысл.

Статическая погрешность средства измерений – погрешность средства измерений, применяемого при измерении физической величины, принимаемой за неизменную.

Динамическая погрешность средства измерений – погрешность средства измерений, возникающая при измерении изменяющейся в процессе измерения физической величины.

3.2. Систематическая погрешность

Общая погрешность измерения может быть представлена в виде:

$$\Delta = \Delta_c + \overset{\circ}{\Delta} \ ,$$

где Δ - общая погрешность, Δ_c - систематическая составляющая, $\overset{\circ}{\Delta}$ - случайная составляющая.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности средства измерений, принимаемая постоянной или закономерно изменяющейся.

К систематическим погрешностям относятся, например, погрешности от неисправности прибора, ошибки нанесения шкалы измерительных приборов, несоответствия действительного значения меры её номинальному значению. Систематические погрешности могут быть изучены опытным путем и исключены из результатов измерений. Основной путь для установления систематической погрешности – тщательный анализ условий эксперимента (измерения), применяемой теории (принципа измерения), применяемой методики и т.п.

3.2.1. Причины возникновения

По виду источника появления систематические погрешности могут быть *методические*, *инструментальные* и *субъективные.*

Субъективные систематические погрешности связаны с индивидуальными особенностями оператора. Как правило, эта погрешность возникает из-за ошибок в отсчете показаний (примерно 0,1 деления шкалы) и неопытности оператора. В основном же систематические погрешности возникают из-за методической и инструментальной составляющих.

Методическая составляющая погрешности обусловлена несовершенством метода измерения, приемами использования СИ, некорректностью расчетных формул и округления результатов.

Инструментальная составляющая возникает из-за собственной погрешности СИ, определяемой классом точности, влиянием СИ на результат и ограниченной разрешающей способности СИ.

Целесообразность разделения систематической погрешности на методическую и инструментальную составляющие определяется следующими моментами:

- для повышения точности измерений можно выделить лимитирующие факторы, а, следовательно, принять решение об усовершенствовании методики или выборе более точных СИ;
- появляется возможность определить составляющую общей погрешности, увеличивающейся со временем или под влиянием внешних факторов, а, следовательно, целенаправленно осуществлять периодические поверки и аттестации;
- инструментальная составляющая может быть оценена до разработки методики, а потенциальные точностные возможности выбранного метода определит только методическая составляющая.

То есть все виды составляющих погрешности нужно анализировать и выявлять в отдельности, а затем суммировать их в зависимости от характера, что является основной задачей при разработке и аттестации методик выполнения измерений.

3.2.2. Профилактика погрешности и введение поправок

В ряде случаев систематическая погрешность может быть исключена за счет устранения источников погрешности до начала измерений (профилактика погрешности), а в процессе измерений - путем внесения известных поправок в результаты измерений.

Профилактика погрешности - наиболее рациональный способ ее снижения и заключается в устранении влияния, например, температуры (термостатированием и термоизоляцией), магнитных полей (магнитными экранами), вибраций и т.п. Сюда же относятся регулировка, ремонт и поверка СИ.

Исключение постоянных систематических погрешностей в процессе измерений осуществляют методом сравнения (замещения, противопоставления), компенсации по знаку (предусматривают два наблюдения, чтобы в результат каждого измерения систематическая погрешность входила с разным знаком), а исключение переменных и прогрессирующих — способами симметричных наблюдений или наблюдением четное число раз через полупериоды.

Исключение постоянных систематических погрешностей в процессе измерений осуществляют методом сравнения (замещения, противопоставления), компенсации по знаку (предусматривают два наблюдения, чтобы в результат каждого измерения систематическая погрешность входила с разным знаком), а исключение переменных и прогрессирующих —

способами симметричных наблюдений или наблюдением четное число раз через полупериоды.

Пример: Пусть периодическая погрешность меняется по закону

$$\Delta = A\sin\frac{2\pi}{t}\varphi,$$

где φ - независимая величина, от которой зависит Δ (время, угол поворота и т.д.); T - период изменения погрешности.

Пусть при $\varphi = \varphi_0$ величина $\Delta_0 = A\sin\frac{2\pi}{T}\varphi_0$. Находим значение погрешности для $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon$, где ε - такой интервал, что

$$\Delta_\varepsilon = A\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\varphi_0 + \pi\right) = -A\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\varphi_0 = -\Delta_0$$

Определим, чему равен интервал ε.

По условию для интервала ε имеем

$$\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\varepsilon = \pi \text{ и } \varepsilon = \frac{\mathrm{T}}{2}.$$

В этом случае $\frac{\Delta_0 + \Delta_\varepsilon}{2} = \frac{\Delta_0 - \Delta_0}{2} = 0$.

То есть периодическая погрешность исключается, если взять среднее двух наблюдений, произведенных одно за другим через интервал, равный полупериоду независимой переменной φ, определяющей значение периодической погрешности. То же будет и для нескольких пар подобного рода наблюдений (например, погрешность от эксцентриситета в угломерных СИ).

При введении поправок используют известные зависимости поправки от измеряемой величины и от внешних условий.

В зависимости от измеряемой величины значение поправки может быть *аддитивным*, *мультипликативным* или *сложным* (то есть вычисляться по определенной зависимости).

Аддитивная погрешность средств измерений (погрешность нуля) – погрешность, остающаяся постоянной при любых значениях измеряемой величины. Аддитивная погрешность возникает в случае смещения реальной функции преобразования относительно номинальной на одну и ту же величину.

Если аддитивная погрешность является систематической, то она может быть устранена. Для этого в измерительных устройствах имеется специальный настроечный узел (корректор) нулевого значения выходного сигнала. Если аддитивная погрешность является случайной – то есть её нельзя исключить, то реальная функция смещается по отношению к номинальной во времени произвольным образом. При этом для реальной функции преобразования можно определить некоторую полосу, ширина которой остается постоянной при всех значениях измеряемой величины. Возникновение случайной аддитивной погрешности обычно вызвано трением в опорах, контактным сопротивлением, дрейфом нуля, шумом и фоном измерительного устройства.

Мультипликативная погрешность средств измерений – погрешность, изменяющаяся (линейно возрастающая или убывающая) в зависимости от значения измеряемой величины. Это линейная зависимость с коэффициентом *К*. Подобного рода погрешность исключается введением поправки, которая вычисляется в зависимости от измеряемой величины.

Сложная погрешность средств измерений – погрешность, изменяющаяся в зависимости от значения измеряемой величины по сложному закону (отличающемуся от линейной зависимости). Подобного рода погрешности свойственны измерениям, где условия их проведения способствуют сильному отклонению измеренного значения от истинного. Например, измерение температуры бесконтактным способом при помощи пирометра.

Нужно помнить, что полностью исключить систематические погрешности невозможно, т.к. методы и средства, с помощью которых обнаруживаются и оцениваются систематические погрешности, сами имеют свои погрешности. Поэтому всегда остается не исключенный остаток систематической погрешности.

3.3. Случайная погрешность

Случайными называются погрешности, которые при многократных повторениях измерения изменяются нерегулярным, непредсказуемым образом, приводя к разбросу измеренных значений. К ним относятся, например, перекосы элементов приборов в их направляющих, нерегулярные изменения моментов трения в опорах, погрешности округления или отсчитывания показаний приборов.

Случайная $\overset{o}{\Delta}$ составляющая изменяется при повторных измерениях одного и того же параметра случайным образом.

Случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений, но их влияние можно уменьшить путем увеличения числа измерений одной величины и обработки опытных данных.

Обработка информации представлена в следующей главе.

4 Обработка результатов измерений

4.1. Случайные величины

Всякая случайная величина X обладает тем свойством, что при производстве в неизменных условиях n наблюдений будут зарегистрированы неодинаковые значения χ_1, χ_2, …, χ_n, среди которых, однако, могут встречаться и повторяющиеся. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретная случайная величина принимает лишь отдельные, изолированные одно от другого значения. Таким свойством обладают, прежде всего, параметры, называемые атрибутивными признаками (например – цвет предмета, сорт продукции, годное или бракованное изделие и т. д.). Отдельные значения подобных параметров определяются путем счета и поэтому значениями дискретной случайной величины могут быть только натуральные числа.

Непрерывная случайная величина принимает любые значения из некоторого свойственного ей числового интервала. Таким свойством обладают количественные признаки (механические свойства материала, фактические размеры продукции, производительность агрегата при обработке конкретного профилеразмера и т. п.) Отдельные значения таких параметров определяются путем измерений или расчетов и поэтому могут быть любыми действительными числами.

И для дискретной, и для непрерывной случайной величины характерны, по крайней мере, две закономерности:

1. Всякая случайная величина имеет некоторый ограниченный с обеих сторон интервал варьирования, величина и положение которого на числовой оси обусловлены ее физической природой. Случайность проявляется лишь в том, что значение, которое будет обнаружено в некоторый момент наблюдения за анализируемым параметром, заранее не известно.
2. Каждое значение случайной величины проявляется внутри интервала ее варьирования с совершенно определенной вероятностью.

4.2. Закон распределения

Закон распределения – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Часто также используют термин «Распределение вероятности».

Закон распределения представляют либо функцией распределения, либо плотностью распределения.

Функция распределения отображает вероятность события, заключающегося в том, что случайная величина (например X) примет значение меньше, чем произвольное действительное число x (т. е. вероятность события $X < x$):

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.1}$$

В виде функции распределения можно отобразить закон распределения как непрерывной, так и дискретной случайной величины (рис. 4.1).

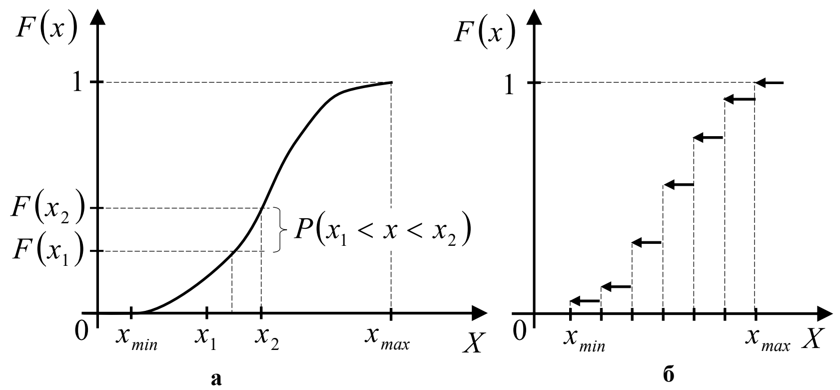


Рис. 4.1. Функции распределения непрерывной (а) и дискретной (б) случайных величин

Независимо от вида случайной величины функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ есть неубывающая функция x и если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) < F(x_2)$. Разность двух ординат, соответствующих точкам x_1 и x_2, дает вероятность того, что значения случайной величины будут лежать в интервале между x_1 и x_2:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{4.2}$$

2. Значения функции распределения при предельных значениях аргумента (т. е. соответствующей случайной величины) равны 0 и 1. Для генеральной совокупности это свойство записывают следующим образом:

$$F\left(x_{min}\right)=0,\ F\left(x_{max}\right)=1. \qquad (4.3)$$

Особенностью функции распределения дискретной случайной величины является то, что она есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям (частотам) этих значений (рис. 4.1,б).

Плотность распределения (используют также термины *плотность распределения вероятности, плотность вероятности*) отображает вероятность события, состоящего в том, что произвольное значение x случайной величины X находится в некотором наперед заданном интервале $\left\{x_1, x_2\right\}$ (т.е. вероятность события $x_1 < x < x_2$):

$$f\left(x\right)=P\left(x_1 < X < x_2\right). \qquad (4.4)$$

График плотности распределения некоторой случайной величины изображен на рис. 4.2.

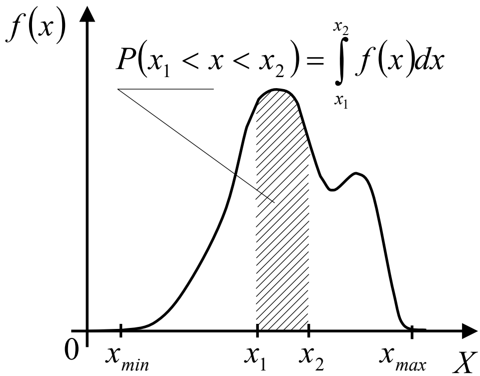


Рис. 4.2. Плотность распределения вероятности случайной величины

Плотность распределения существует только для непрерывной случайной величины и если функция распределения данной случайной величины непрерывна и дифференцируема, то:

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right). \qquad (4.5)$$

По сравнению с функцией распределения описание распределения с помощью плотности вероятности более удобно и наглядно, так как позволяет отобразить его особенности на различных участках внутри интервала варьирования данной случайной величины.

Свойства плотности распределения:

Плотность распределения определяет случайную величину также полно, как и функция распределения и является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0. \tag{4.6}$$

Площадь, ограниченная числовой осью, кривой плотности распределения, а также прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ равна вероятности того, что случайная величина примет некоторое значение в рассматриваем интервале:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 < x < x_2) \cdot \tag{4.7}$$

Так как событие $x_{min} < x < x_{max}$ является достоверным, площадь под кривой плотности распределения равна 1:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx = 1 \cdot \tag{4.8}$$

4.3.Нормальное распределение и его особенности

К настоящему времени обнаружен целый ряд законов распределения вероятности. Для дискретных случайных величин наиболее характерны распределение Пуассона и биноминальное. Для непрерывных случайных величин известны показательный и нормальный законы распределения, а также связанные с нормальным, - распределения Стьюдента, Фишера и хи-квадрат.

Нормальное распределение занимает особое положение, так как в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности оно является предельным законом, к которому, при весьма часто встречающихся условиях, приближаются все другие распределения.

Нормальное распределение - это распределение непрерывной случайной величины, для которого характерна плотность распределения вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma^2} \right], \tag{4.9}$$

где M_x – математическое ожидание (характеристика положения истинного значения случайной величины);

σ – стандартное отклонение (характеристика вариации значений случайной величины).

Функция и плотность нормального распределения схематично

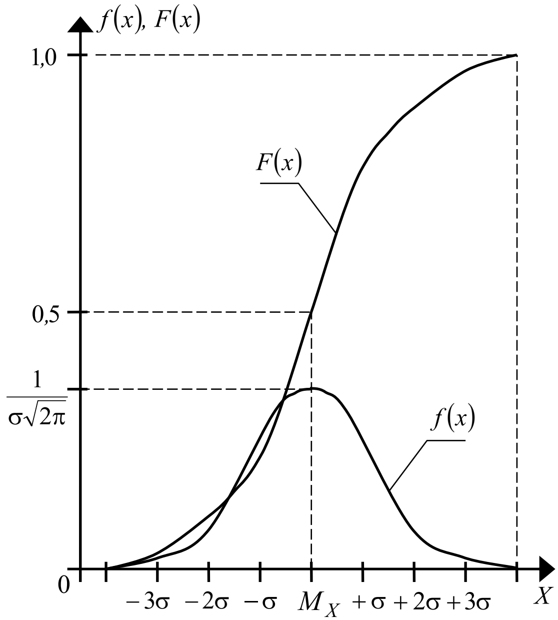


Рис. 4.3. Функция и плотность нормального распределения

изображены на рис. 4.3.

Нормальное распределение имеет следующие важные для практического использования свойства:

Кривая плотности распределения симметрична относительно прямой $x = M_x$ и при этой абсциссе достигает максимума, который равен

$$f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0,3989}{\sigma}. \tag{4.10}$$

Площадь под кривой, ограниченная ординатами $f(M_x - 3\sigma)$ и $f(M_x + 3\sigma)$ равна 0,9973 (т. е. практически 1). Это означает, что при нормальном распределении случайной величины вероятность проявления ее значений, отличающихся от математического ожидания более, чем на 3σ, практически равна нулю.

Площадь под кривой, ограниченная ординатами $f(M_x - 2\sigma)$ и $f(M_x + 2\sigma)$ равна 0,9544 (с достаточной для практики точностью 0,95). Это означает, что при нормальном распределении случайной величины вероятность проявления ее значений, отличающихся от математического ожидания более, чем на 2σ, не превышает 0,05 (т. е. 5 %).

Площадь под кривой, ограниченная ординатами $f(M_x - \sigma)$ и $f(M_x + \sigma)$ равна 0,6826 (для практических целей можно принять 0,7). Это означает, что при нормальном распределении случайной величины вероятность проявления ее значений, отличающихся от математического ожидания более, чем на σ, равна 0,3 (т. е. 30 %).

Нормальное распределение обладает свойством линейности, которое формулируется следующим образом. Если *независимые* случайные величины X_1 и X_2 имеют нормальные распределения, то для произвольных чисел α и β величина $Y = \alpha X_1 + \beta X_2$ также имеет нормальное распределение, причем из свойств математического ожидания и дисперсии следует

$$M_Y = \alpha M_{X1} + \beta M_{X2}; \qquad (4.11)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{X1}^2 + \beta \sigma_{X2}^2}. \qquad (4.12)$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров - математического ожидания M_x и стандартного отклонения σ, что затрудняет ее представление в табличном (табулированном) виде. Поэтому было предложено использовать нормированную случайную величину:

$$Z = \frac{x - M_x}{\sigma},$$

для которой функция плотности нормального распределения (4.9) принимает вид:

$$f(x) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \qquad (4.13)$$

График плотности стандартного нормального распределения приведены на рис. 4.5.

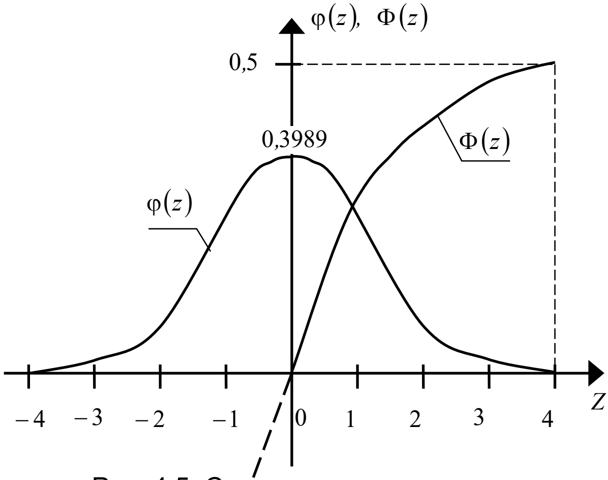


Рис. 4.5. Стандартное нормальное распределение:
$\varphi(z)$ – кривая Гаусса; $\Phi(z)$ – Функция Лапласа

График плотности стандартного нормального распределения называют “*кривая вероятностей*”, “*кривая Гаусса*”. Основным отличием кривой Гаусса от кривой ненормированного нормального распределения является то, что она фактически строится для $M(x) = 0$ и $\sigma = 1$ (рис. 4.5). Из указанной особенности следует ряд специфических свойств.

Плотность стандартного нормального распределения симметрична относительно оси ординат и имеет максимум, равный 0,3989.

Плотность стандартного нормального распределения является четной функцией:

$$\varphi(-z) = \varphi(z).$$

При $z = 4$ плотность стандартного нормального распределения равна нулю

$$\varphi(4) = 0{,}0001 \approx 0 .$$

Поэтому при ее табулировании указываются значения для нормированных значений случайной величины от 0 до 4.

Значение функции ненормированного нормального распределения равно значению функции стандартного нормального распределения.

Чтобы получить функцию стандартного нормального распределения необходимо выполнить интегрирование зависимости (4.13), однако результат не может быть выражен через элементарные функции. Поэтому используется функция Лапласа:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du . \qquad (4.14)$$

Смысл функции Лапласа иллюстрируется рис.4.6.

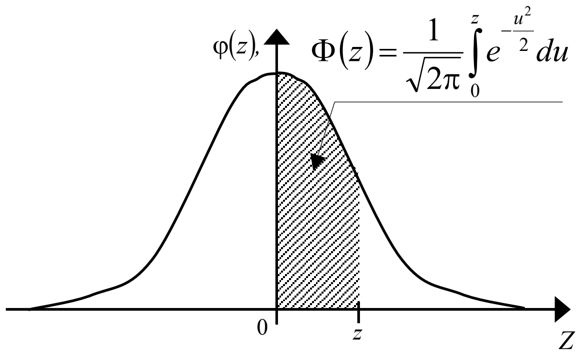


Рис.4.6. К определению Функции Лапласа

$\Phi(z)$ представляет собой значение вероятности, с которой случайная величина, обладающая стандартным нормальным распределением, принимает значение из интервала $\{0;\ z\}$. Основные свойства функции Лапласа:

1. Функция Лапласа является нечетной:

   $$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

   Ее график симметричен относительно начала координат (рис. 4.6) и $\Phi(0)=0$.
2. Функция Лапласа является монотонно возрастающей в пределах от $\Phi(-4) = -0{,}5$ до $\Phi(+4) = +0{,}5$.

С учетом указанных свойств переход от функции Лапласа к функции стандартного нормального распределения осуществляется следующим образом:

$$F(z,0,1)=0{,}5+\Phi(z).$$

4.4.Выборка и выборочные характеристики

Как уже отмечалось, случайная величина может принимать множество значений, которые, однако, соответствуют объективно существующему интервалу ее варьирования. Совокупность всех возможных значений случайной величины $\{\chi_j\}_N$ для всех возможных условий наблюдений называется генеральной совокупностью. Количество значений случайной величины в генеральной совокупности (объем генеральной совокупности) N определяется характером случайной величины и для непрерывной величины $N \to \infty$.

По некоторым причинам, например в связи с ограниченностью продолжительности наблюдений, из генеральной совокупности удается обнаружить лишь $n < N$ значений случайной величины $\{x_i\}_n$. Совокупность ограниченного числа значений случайной величины, которые получены в результате наблюдения, называют выборкой, а количество n значений в выборке - объемом выборки. Выборка является подмножеством генеральной совокупности:

$$\{x_i\}_n \in \{\chi_j\}_N .$$

Для решения прикладных задач разработаны и применяются специальные числовые характеристики распределения вероятности. Каждая такая характеристика имеет строго определенный смысл, который не изменяется от того, что рассматривает исследователь - генеральную совокупность или выборку из нее. Однако формулы для расчета числовых характеристик распределения в каждом из указанных случаев могут быть различными.

При использовании числовых характеристик случайной величины весьма важным является следующее обстоятельство. Изучая случайную величину, мы не можем охватить генеральную совокупность и поэтому, имеем в своем распоряжении лишь ограниченную выборку из нее. Таким образом, по выборке будут получены не истинные значения той или иной характеристики распределения изучаемой случайной величины, а лишь их приближенные значения (оценки).

В общем случае для оценивания некоторого параметра ξ генеральной совокупности используется некоторая величина θ, вычисляемая по результатам выборки. По смыслу ξ и θ

характеризуют одно и то же свойство случайной величины. Однако величина θ является *выборочной оценкой* действительного значения анализируемого параметра: $\theta \approx \xi$, в литературе ее часто называют *статистикой*. Статистика есть случайная величина, распределение которой отличается и от распределения случайной величины в генеральной совокупности, и от распределения оцениваемого параметра ξ. В связи с этим выборочные оценки должны отвечать ряду требований.

1. *Выборочная оценка должна быть состоятельной.* Оценка θ является состоятельной, если с увеличением объема выборки n вероятность ее значения стремится к вероятности значения оцениваемого параметра генеральной совокупности:
$$\lim_{n\to\infty} Prob\left\{\left|\theta-\xi\right|<\Delta\right\}=1 \text{ или } \theta \xrightarrow{Prob} \xi .$$
2. *Выборочная оценка должна быть несмещенной.* Оценка θ является несмещенной, если при любом объеме выборки ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру:
$$M_\theta=\xi .$$
3. *Выборочная оценка должна быть эффективной* Из различных оценок одного и того же параметра генеральной совокупности наиболее эффективной является та, которая обладает наименьшей дисперсией:
$$\lim_{n\to\infty} D_\theta=0 .$$

4.5. Обработка результатов многократных измерений

При анализе множества числовых значений, являющихся результатами измерений необходимо иметь ввиду, что меньшая случайная погрешность наблюдается при максимальном количестве значений измеренного параметра
$$\overset{\circ}{\Delta}\to 0 \text{ при } n\to\infty .$$

Понятно, что повышать количество измерений до бесконечности невозможно, поэтому приходиться ограничиваться их выборкой.

Объём выборки зависит от нескольких факторов:

- экономической целесообразности повышения числа измерений, больше измерений - больше расходов;

- точности, которая нам необходима (технические измерения 95% или исследовательские измерение 99,73%)

- времени, затрачиваемой на обработки информации.

Фактически общей задачей обработки результатов многократных измерений является установление степени доверия к результатам и определения точности с учётом случайной и систематической составляющей погрешности.

Предположив, что систематическая погрешность практически полностью исключена посредство введения поправок, остановимся более подробно на вопросе работы со случайной составляющей погрешности.

Для установления степени доверия и определения точности результатов многократных измерений нам необходимо учесть статистические характеристики.

4.5.1. Статистические характеристики

Среди числовых статистических характеристик случайной величины различают:

- характеристики положения;
- характеристики рассеяния;
- характеристики формы распределения.

Математическое ожидание случайной величины X представляет собой такое ее значение M_x, около которого сосредоточены все другие возможные. В математической статистики принято считать, что математическое ожидание максимально приближено к истинному значению величины и может его достоверно заменять в расчетах. Наилучшей оценкой математического ожидания (т. е. и состоятельной, и несмещенной, и эффективной) является выборочное среднее, рассчитываемое как среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx M_x. \qquad (4.15)$$

Медиана Me – это такое значение случайной величины, что для 50% ее возможных значений выполняется условие $x < Me$, а для других 50% выполняется условие $x > Me$. На графике функции распределения (рис. 4.7,а) медиана есть абсцисса, которой соответствует значение $F(x)$=0,5. На графике плотности распределения (рис. 4.7,б) медиана есть абсцисса, которая делит площадь под кривой $f(x)$ на две равные части.

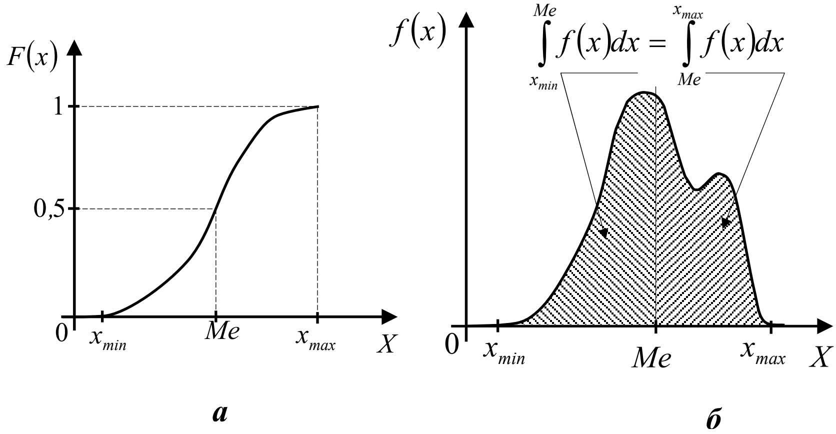


Рис. 4.7. Положение медианы:
а – на графике функции распределения; *б* – на графике плотности распределения

Для нахождения медианы по выборке необходимо сначала выполнить ее ранжирование (расположить ее элементы) по возрастанию. Если объем выборки есть нечетное число, то оценкой медианы будет элемент, расположенный в середине ряда:

$$Me \approx x_{(n+1)/2}. \tag{4.16}$$

Если объем выборки есть четное число, то:

$$Me \approx \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}. \tag{4.17}$$

Мода Mo – значение случайной величины, вероятность появления которого наибольшая. На графике плотности вероятности мода есть абсцисса, соответствующая максимуму кривой $f(x)$. При оценке моды по выборке Mo принимают равным тому значению случайной величины, которое встречается в выборке наиболее часто.

Для нормального распределения среднее выборочное, медиана и мода совпадают:

$$\overline{x} = Me = Mo.$$

Дисперсия D_X – математическое ожидание квадратов отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания:

$$D_X = M\left\{\left[x - M_X\right]^2\right\}. \tag{4.18}$$

На основании выборки дисперсию случайной величины оценивают следующими характеристиками: *дисперсией распределения* σ^2 *(смещенная оценка)* и *выборочной дисперсией* s^2 *(несмещенная оценка)*. Указанные выборочные оценки дисперсии рассчитывают по формулам:

$$D_X = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2; \qquad (4.19)$$

$$D_X = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2. \qquad (4.20)$$

Выборочная дисперсия (4.20) является эффективной, несмещенной и состоятельной оценкой при любом объеме выборки. Для дисперсии распределения (4.19) состоятельность также обеспечивается при любом объеме выборки, но несмещенность и эффективность достигаются только при n > 30.

Несмещенность и эффективность s^2 достигнуты за счет того, что в знаменателе объем выборки уменьшен на единицу. Это оказалось необходимым в связи с использованием в формуле среднего выборочного $\bar{x}$, значение которого связано с элементами рассматриваемой выборки. Каждая величина, зависящая от элементов выборки и используемая в формуле выборочной оценки, называется *связью*. Разность между объемом выборки и числом связей l в формуле, по которой рассчитывается статистика, называют *числом степеней свободы* данной статистики $\nu = n - l$.

Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение, стандарт). Недостатком дисперсии считают то, что она имеет размерность квадрата анализируемой величины. Для устранения указанного недостатка было введено среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение, стандарт), которое представляет собой корень квадратный из дисперсии случайной величины:

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}. \qquad (4.21)$$

Наилучшей выборочной оценкой для σ_X является *выборочное среднее квадратическое отклонение (выборочное стандартное отклонение)*:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \approx \sigma_X. \qquad (4.22)$$

Как видно из формулы (4.22), выборочное стандартное отклонение определяется через выборочную дисперсию (4.20) и поэтому также является несмещенной и эффективной оценкой при любом n.

Для выборок объемом $n > 30$ свойства несмещенности и эффективности проявляются также у стандартного отклонения, вычисляемого на основании дисперсии распределения (4.19):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \approx \sigma_X . \qquad (4.23)$$

В практике анализа числовой информации используют также и ряд других характеристик рассеяния случайной величины. Например, коэффициент вариации.

Коэффициент вариации V_x характеризует, какую долю от математического ожидания случайной величины составляет ее среднее квадратическое отклонение и является мерой относительной изменчивости наблюдаемой случайной величины:

$$V_x = \frac{s}{\bar{x}} . \qquad (4.24)$$

Будучи безразмерной величиной, коэффициент вариации позволяет сравнивать степень рассеяния различных случайных величин. Его значение может быть представлено как в относительных единицах, так и в процентах. В последнем случае результат, полученный расчетом по формуле (4.23), необходимо умножить на 100. Недостатком этого показателя является то, что он становится малонадежным при $\bar{x} \to 0$, а при $\bar{x}$=0 вообще теряет смысл. Однако, при числовых значениях существенно отличных от нуля при $v_x \in 0{,}33....0{,}35$ можно считать, что распределение случайной величины подчиняется нормальному закону.

Интервальные оценки характеризуют ошибку оценивания истинного значения ξ некоторой характеристики распределения случайной величины с помощью соответствующей выборочной оценки θ. Их применение необходимо потому, что каждая выборочная оценка сама по себе является случайной величиной с некоторым распределением вероятности.

При интервальном оценивании используют доверительную вероятность, уровень значимости, доверительный интервал и доверительные границы.

Доверительная вероятность - вероятность события, заключающегося в том, что ошибка оценивания истинного значения некоторого параметра распределения случайной величины его выборочной оценкой не превышает величины Δ:

$$p = Prob\left(\left|\xi - \theta\right| \le \Delta\right), \text{ где } p < 1. \qquad (4.25)$$

Уровень значимости - вероятность события, заключающегося в том, что ошибка оценивания истинного значения некоторого параметра распределения случайной величины его выборочной оценкой превышает величину Δ:

$$\alpha = \Pr ob\left(\left|\xi - \theta\right| > \Delta\right) = (1 - p). \qquad (4.26)$$

Доверительный интервал - интервал значений выборочной характеристики, внутри которого истинное значение оцениваемого параметра находится с заданной доверительной вероятностью.

То есть, если *р* означает вероятность того, что $\bar{x}$ результата измерения отличается от истинного на величину не более, чем $\overset{\circ}{\Delta}$:

$$p = \left\{\bar{x} - \overset{0}{\Delta} < x_{ucm} < \bar{x} + \overset{0}{\Delta}\right\},. \qquad (4.27)$$

то в этом случае *р* — доверительная вероятность, а интервал от $\bar{x} - \overset{0}{\Delta}$ до $\bar{x} + \overset{0}{\Delta}$ - доверительный интервал.

Доверительные границы – значения выборочной оценки, представляющие собой границы доверительного интервала:

$$\theta_1 = \theta - \Delta; \qquad (4.27)$$

$$\theta_2 = \theta + \Delta. \qquad (4.28)$$

В практике обработки числовой информации наиболее часто встречается задача интервального оценивания выборочного среднего $\bar{x}$. При ее решении исходят из того, что $\bar{x}$ как случайная величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M_{\bar{x}} = \bar{x}$ и средним квадратическим отклонением.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (4.29)$$

Величина $s_{\bar{x}}$ имеет также специальное название - стандартная ошибка выборочного среднего или стандартное отклонение выборочного среднего.

Доверительные границы для выборочного среднего симметричны:

$$\Delta_x = \pm\, s_{\bar{x}}\, t[\alpha\,; n-1], \tag{4.30}$$

где $t[\alpha\,; n-1]$ - табличное значение (квантиль) распределения Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $\nu = n-1$, также называемое коэффициентом Стьюдента.

Существуют специальные справочные таблицы распределения Стьюдента, которые, как правило, обязательно приводятся в литературе по вопросам теории вероятности и математической статистике.

Зная доверительные границы выборочного среднего, можно утверждать, что с вероятностью $p = 1-\alpha$ истинное значение случайной величины равно

$$\bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}}\,. \tag{4.31}$$

Иначе:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}\,. \tag{4.32}$$

<u>КУРС ЛЕКЦИИ В СТАДИИ РАЗРАБОТКИ !</u>